



## Acceleration de la convergence dans le calcul des écoulements de fluides visqueux

C. Begue, Marie-Odile Bristeau, Roland Glowinski, B. Mantel, Jacques Périaux, G. Roge

### ► To cite this version:

C. Begue, Marie-Odile Bristeau, Roland Glowinski, B. Mantel, Jacques Périaux, et al.. Acceleration de la convergence dans le calcul des écoulements de fluides visqueux. [Rapport de recherche] RR-0861, INRIA. 1988. inria-00075693

**HAL Id: inria-00075693**

**<https://inria.hal.science/inria-00075693>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE  
**INRIA-ROCQUENCOURT**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. (1) 39 63 55 11

# Rapports de Recherche

N° 861

## **ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DANS LE CALCUL DES ECOULEMENTS DE FLUIDES VISQUEUX**

**Catherine BEGUE  
Marie-Odile BRISTEAU  
Roland GLOWINSKI  
Bertrand MANTEL  
Jacques PERIAUX  
Gilbert ROGE**

**JUIN 1988**



★ R R - 8 8 6 1 ★

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DANS LE CALCUL  
DES ECOULEMENTS DE FLUIDES VISQUEUX  
(I). Cas incompressible et cas compressible non  
conservatif.

-----  
ACCELERATION OF THE CONVERGENCE FOR VISCOUS  
FLOW CALCULATIONS

(I). Incompressible and non conservative  
compressible cases.

-----  
Catherine Bègue<sup>+</sup>, Marie-Odile Bristeau<sup>++</sup>, Roland Glowinski<sup>+++</sup>,  
Bertrand Mantel<sup>+</sup>, Jacques Périaux<sup>+</sup>, Gilbert Rogé<sup>+</sup>

-----  
Résumé :

L'utilisation des méthodes de décomposition d'opérateurs, appliquées à la simulation numérique des écoulements de fluides visqueux (compressibles et incompressibles) conduit à la résolution de problèmes linéaires du type Stokes et de systèmes elliptiques non linéaires. Ces problèmes mettent en jeu un grand nombre de variables et de ce fait exigent des méthodes de résolution particulièrement efficaces.

Dans ce rapport, on analyse la résolution des sous-problèmes de Stokes par des méthodes itératives comprenant une étape de préconditionnement par un opérateur de bord bien choisi. La résolution des sous-problèmes non linéaires (de type conservatif) est obtenue par l'intermédiaire d'une méthode itérative généralisant l'algorithme *GMRES* de Brown et Saad (cf.[1]).

Des résultats numériques obtenus à partir de la simulation numérique d'écoulements autour et dans des entrées d'air et autour d'arrière corps, illustrent les possibilités de ces méthodes.

Abstract :

Operator splitting techniques applied to the numerical simulation of unsteady compressible and incompressible viscous flows lead to the solutions of linear sub problems of Stokes type and of nonlinear elliptic systems. These problems involve a quite large number of variables requiring efficient solution algorithms.

---

<sup>+</sup> AMD/BA, 78 quai Marcel Dassault, 92214 ST CLOUD Cedex, France.

<sup>++</sup> INRIA, B.P. 105, 78153 LE CHESNAY Cedex, France.

<sup>+++</sup> University of Houston, HOUSTON, Texas, U.S.A. and INRIA.

In this paper we discuss the solution of the Stokes subproblems by iterative techniques involving a preconditioning step by a suitable boundary operator. The solution of the nonlinear advection subproblems is achieved through an iterative method generalizing the well known GMRES algorithm.

Numerical results observed from the simulation of flows around and inside air-intakes and around rear-bodies, illustrate the possibilities of the above methods.

## 1. Introduction et orientation

La simulation numérique des écoulements de fluides visqueux, en 2 et 3 dimensions, modélisés par les équations de Navier-Stokes peut être obtenue par des méthodes de décomposition d'opérateurs telles que celles décrites dans les références [2], [3]. Les sous-problèmes qui en résultent sont eux-mêmes assez compliqués ce qui implique que leur résolution numérique demande l'utilisation de méthodes (en général itératives) très performantes.

L'objectif de ce rapport est de décrire certaines méthodes itératives récentes pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles et incompressibles via des méthodes de décomposition d'opérateurs.

## 2. Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements de fluides visqueux

On considère d'abord le cas particulier (important) d'écoulements autour de profils. Avec les notations de la figure 2.1., les écoulements

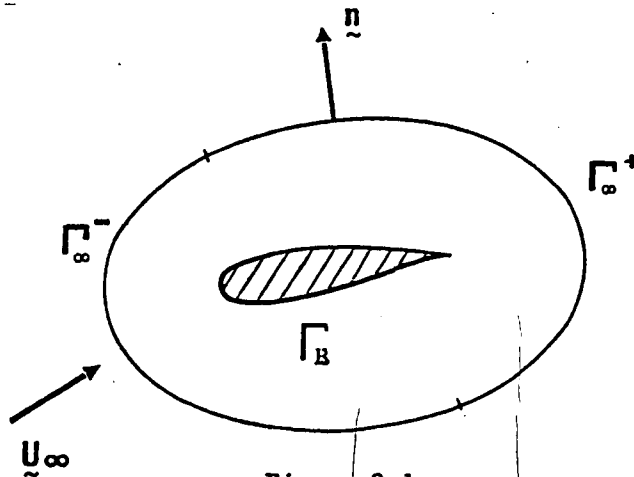


Figure 2.1.

isothermes, visqueux, incompressibles sont modélisés par les équations aux dérivées partielles ci-dessous

$$(2.1) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(2.2) \quad \nabla \cdot \underline{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (condition d'incompressibilité),}$$

avec  $\underline{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$  ( $N=2,3$  en pratique) la vitesse de l'écoulement,  $p$  la pression  $\nu$  un coefficient de viscosité, et

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \left\{ \sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\}_{i=1}^N.$$

Il faut ajouter à (2.1), (2.2) des *conditions aux limites* ; pour simplifier l'exposé, on ne considérera que des *conditions de Dirichlet*, i.e.

$$(2.3) \quad \underline{u} = \underline{g} \text{ sur } \Gamma \quad (\Gamma = \partial\Omega)$$

(avec  $\int_{\Gamma} \underline{g} \cdot \underline{n} \, d\Gamma = 0$ ). Pour l'implémentation de conditions aux limites plus compliquées, cf. e.g. [2] et [3]. Pour le problème d'évolution (2.1), (2.2), il convient d'ajouter une *condition initiale*, soit

$$(2.4) \quad \underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0(\underline{x}).$$

Pour les *écoulements compressibles*, on utilisera le modèle (*non conservatif*) ci-dessous :

$$(2.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0,$$

$$(2.6) \quad \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + (\gamma - 1) \underline{\nabla} \rho T = \frac{1}{Re} [\underline{\nabla}^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u})],$$

$$(2.7) \quad \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T + (\gamma - 1) \rho T \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\gamma}{Pr} \underline{\nabla}^2 T + F(\underline{\nabla} \underline{u}) \right],$$

où la pression est donnée par la loi des gaz parfaits

$$(2.8) \quad p = (\gamma - 1) \rho T,$$

et où  $\rho$ ,  $\underline{u}$ ,  $T$  sont, respectivement, en variables réduites, la *densité*, la *vitesse* et la *température*, avec (si  $N=2$ )

$$(2.9) \quad F(\underline{\nabla} \underline{u}) = \frac{4}{3} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2.$$

Dans (2.6), (2.7),  $Re$ ,  $Pr$  et  $\gamma$  sont le *nombre de Reynolds*, le *nombre de Prandtl*, et le *rapport des chaleurs spécifiques*, respectivement ( $\gamma = 1,4$  pour l'air).

Avec  $\Gamma_\infty$  comme dans la figure 2.1 et

$$(2.10) \quad \Gamma_\infty^- = \{x | x \in \Gamma_\infty, \underline{u}_\infty \cdot \underline{n}_\infty < 0\},$$

$$(2.11) \quad \Gamma_\infty^+ = \{x | x \in \Gamma_\infty, \underline{u}_\infty \cdot \underline{n}_\infty \geq 0\},$$

on impose sur la *frontière amont*  $\Gamma_\infty^-$

$$(2.12) \quad \underline{u} = \underline{u}_\infty, \quad \rho = 1, \quad T = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2},$$

puis des conditions, soit de Neumann, soit "naturelles" sur la *frontière aval*, et

$$(2.13) \quad \underline{u} = 0 \quad \text{et} \quad T = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)$$

sur  $\Gamma_B$ .

Dans (2.10), (2.13),  $\underline{u}_\infty$ ,  $T_\infty$ ,  $M_\infty$  désignent la vitesse, la température et le Mach pour l'*écoulement uniforme* correspondant (celui qui prévaut loin de  $\Gamma_B$ ).

Finalement, il faut ajouter aux équations (2.5)-(2.8) les conditions initiales suivantes

$$(2.14) \quad \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad \underline{u}(x,0) = \underline{u}_0(x), \quad T(x,0) = T_0(x).$$

Il apparaît que l'utilisation de la nouvelle variable

$$(2.15) \quad \sigma = \text{Log } \rho$$

conduit à une meilleure stabilité des schémas numériques. Avec cette nouvelle variable, les équations de Navier-Stokes deviennent

$$(2.16) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \sigma = 0,$$

$$(2.17) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + (\gamma-1)(T \underline{\nabla} \sigma + \underline{\nabla} T) = \frac{e^{-\sigma}}{\text{Re}} (\underline{\nabla}^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}))$$

$$(2.18) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T + (\gamma-1)T \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{e^{-\sigma}}{\text{Re}} \left( \frac{\gamma}{\text{Pr}} \underline{\nabla}^2 T + F(\underline{\nabla} \underline{u}) \right)$$

Ces deux dernières équations peuvent également s'écrire

$$(2.19) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \mu \nabla^2 \underline{u} + \beta \nabla \sigma - \underline{\psi}(\sigma, \underline{u}, T) = 0,$$

$$(2.20) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \pi \nabla^2 T - \chi(\sigma, \underline{u}, T) = 0,$$

avec :

(a)  $\delta$  : une valeur moyenne de l'inverse de la densité ( $\delta=1$  est une valeur possible).

$$(b) \quad \nu = 1/Re, \quad \mu = \nu \delta, \quad \pi = \gamma \nu \delta / Pr,$$

$$(c) \quad \beta = (\gamma-1) T_B = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma-1}{2} + \frac{1}{M_\infty^2} \right),$$

$$(d) \quad \underline{\psi}(\sigma, \underline{u}, T) = -(\gamma-1) [\nabla T + (T-T_B) \nabla \sigma] \\ - (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nu [e^{-\sigma} (\nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \underline{u})) - \delta \nabla^2 \underline{u}],$$

$$(e) \quad \chi(\sigma, \underline{u}, T) = -(\gamma-1) T \nabla \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \nabla T + \frac{\gamma \nu}{Pr} (e^{-\sigma} - \delta) \nabla^2 T \\ + \nu e^{-\sigma} F(\nabla \underline{u}).$$

### 3. Discrétisation en temps par décomposition d'opérateurs

Par utilisation de discrétisations en temps basées sur des décompositions d'opérateurs, il est possible de découpler (comme montré en, e.g. [2], [3]) les différents opérateurs intervenant dans les modèles ci-dessus. Dans le cas *incompressible*, on obtiendrait par exemple le schéma ci-dessous (de type Peaceman-Rachford) où  $\Delta t$  ( $>0$ ) est le pas de discrétisation en espace :

$$(3.1) \quad \underline{u}^0 = \underline{u}_0,$$

puis pour  $n \geq 0$ , on calcule  $\{\underline{u}^{n+1/2}, p^{n+1/2}\}$  et  $\underline{u}^{n+1}$  par

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\underline{u}^{n+1/2} - \underline{u}^n}{\Delta t/2} - \frac{\nu}{2} \nabla^2 \underline{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} = \frac{\nu}{2} \nabla^2 \underline{u}^n - (\underline{u}^n \cdot \nabla) \underline{u}^n \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \underline{u}^{n+1/2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \underline{u}^{n+1/2} = \underline{g}^{n+1/2} \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$



$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\nu}{2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}^{n+1} + (\tilde{u}^{n+1} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{u}^{n+1} = \frac{\nu}{2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}^{n+1/2} - \tilde{\nabla} p^{n+1/2} \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{u}^{n+1} = g^{n+1} \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

respectivement.

On remarque que les problèmes (3.2) sont linéaires et sont très voisins des problèmes de Stokes stationnaires ; quant aux problèmes de diffusion-convection (3.3), ce sont des systèmes elliptiques non linéaires. On trouvera dans [2],[3] des méthodes de décomposition d'opérateurs plus sophistiquées.

Dans le cas *compressible*, on obtiendrait la variante ci-dessous du schéma de Peaceman-Rachford (3.1)-(3.3) :

On suppose que  $\theta \in ]0, 1/2[$  et que

$$(3.4) \quad \sigma^0 = \sigma_0 = \ln \rho_0, \quad u^0 = u_0, \quad T^0 = T_0,$$

puis pour  $n \geq 0$ , partant de  $\{\sigma^n, u^n, T^n\}$ , on résout

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{\sigma^{n+\theta} - \sigma^n}{\theta \Delta t} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}^{n+\theta} = -\tilde{u}^n \cdot \tilde{\nabla} \sigma^n, \\ \frac{\tilde{u}^{n+\theta} - \tilde{u}^n}{\theta \Delta t} - a \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}^{n+\theta} + \beta \tilde{\nabla} \sigma^{n+\theta} = \psi(\sigma^n, \tilde{u}^n, T^n) + b \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}^n, \\ \frac{T^{n+\theta} - T^n}{\theta \Delta t} - a \pi \tilde{\nabla}^2 T^{n+\theta} = \chi(\sigma^n, \tilde{u}^n, T^n) + b \pi \tilde{\nabla}^2 T^n, \end{cases}$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{\sigma^{n+1-\theta} - \sigma^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + \tilde{u}^{n+1-\theta} \cdot \tilde{\nabla} \sigma^{n+1-\theta} = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}^{n+\theta}, \\ \frac{\tilde{u}^{n+1-\theta} - \tilde{u}^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - b \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}^{n+1-\theta} - \psi(\sigma^{n+1-\theta}, \tilde{u}^{n+1-\theta}, T^{n+1-\theta}) = \\ a \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}^{n+\theta} - \beta \tilde{\nabla} \sigma^{n+\theta}, \\ \frac{T^{n+1-\theta} - T^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - b \pi \tilde{\nabla}^2 T^{n+1-\theta} - \chi(\sigma^{n+1-\theta}, \tilde{u}^{n+1-\theta}, T^{n+1-\theta}) = \\ a \pi \tilde{\nabla}^2 T^{n+\theta}, \end{cases}$$

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} + \nabla \cdot \tilde{u}^{n+1} = -\tilde{u}^{n+1-\theta} \cdot \nabla \sigma^{n+1-\theta}, \\ \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} - a \mu \nabla^2 \tilde{u}^{n+1} + \beta \nabla \sigma^{n+1} = \psi(\sigma^{n+1-\theta}, \tilde{u}^{n+1-\theta}, T^{n+1-\theta}) + \\ b \mu \nabla^2 \tilde{u}^{n+1-\theta}, \\ \frac{T^{n+1} - T^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} - a \pi \nabla^2 T^{n+1} = \chi(\sigma^{n+1-\theta}, \tilde{u}^{n+1-\theta}, T^{n+1-\theta}) + b \pi \nabla^2 T^{n+1-\theta}, \end{array} \right.$$

avec  $0 < a, b < 1$ ,  $a+b = 1$  et

$$(3.8) \quad a = (1-2\theta)/(1-\theta), \quad b = \theta/(1-\theta).$$

Le schéma ci-dessus est un  $\theta$ -schéma très proche de ceux utilisés dans le cas *incompressible* et décrit dans [3] .

#### 4. Accélération de la convergence pour les sous-problèmes de Stokes

##### 4.1. Le cas incompressible

Les sous-problèmes (3.2) sont des cas particuliers du problème de Stokes généralisé

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \tilde{u} - \nu \nabla^2 \tilde{u} + \nabla p = \tilde{f} \text{ dans } \Omega \\ \nabla \cdot \tilde{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{u} = \tilde{g} \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Le problème (4.1), une fois discrétisé de façon appropriée, conduit à un système linéaire qui peut être résolu par des méthodes directes classiques telles que la méthode de Gauss ; cependant pour les problèmes de grande taille, ce qui est le cas des écoulements tri-dimensionnels, l'absence de symétrie de la matrice du système linéaire, et le fait qu'elle n'est pas définie (ou semi définie) positive rendent la résolution assez coûteuse. En conséquence, on va utiliser des techniques itératives qui profitent de la structure de problème de point-selle de (4.1) ; de telles méthodes sont décrites dans e.g. [2],[3] . Dans ce rapport, on va présenter une méthode de *gradient conjugué* pour résoudre

(4.1) dans laquelle, l'inconnue principale est la trace de la pression  $p$  sur  $\Gamma$ . Cette méthode est basée sur la décomposition d'Helmholtz du problème de Stokes (4.1) et utilise comme préconditionneur un opérateur de bord très facile à implémenter.

Soit  $\lambda$  la trace sur  $\Gamma$  de la pression  $p$  ; il est classique (cf. e.g. [2],[4] ) que  $\lambda$  est solution de l'équation

$$(4.2) \quad A \lambda = \beta ,$$

où  $A$  est un opérateur de bord défini comme suit :

$$(4.3)_1 \quad \tilde{\nabla}^2 p_\mu = 0 \text{ dans } \Omega, \quad p_\mu = \mu \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.3)_2 \quad \alpha \tilde{u}_\mu - \nu \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}_\mu = -\tilde{\nabla} p_\mu \text{ dans } \Omega, \quad \tilde{u}_\mu = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.3)_3 \quad -\tilde{\nabla}^2 \psi_\mu = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}_\mu \text{ dans } \Omega, \quad \psi_\mu = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.3)_4 \quad A\mu = - \left. \frac{\partial \psi_\mu}{\partial n} \right|_\Gamma .$$

avec  $\beta$  défini par

$$(4.4)_1 \quad \tilde{\nabla}^2 p_o = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{f} \text{ dans } \Omega, \quad p_o = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.4)_2 \quad \alpha \tilde{u}_o - \nu \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}_o = \tilde{f} - \tilde{\nabla} p_o \text{ dans } \Omega, \quad \tilde{u}_o = \tilde{g} \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.4)_3 \quad -\tilde{\nabla}^2 \psi_o = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}_o \text{ dans } \Omega, \quad \psi_o = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.4)_4 \quad \beta = \left. \frac{\partial \psi_o}{\partial n} \right|_\Gamma .$$

L'opérateur  $A$  n'est pas connu explicitement en général ; on peut cependant démontrer que  $A$  est symétrique et semi-défini positif (cf. [2],[4] pour ces propriétés).

Afin de résoudre (4.1), via (4.2), on peut utiliser un algorithme de gradient conjugué préconditionné par l'opérateur  $S$  défini par

$$(4.5) \quad S = B^{-1}$$

où

$$(4.6) \quad B\mu = \frac{\alpha}{v} \phi_\mu|_\Gamma + 4\sqrt{\frac{\alpha}{v}} \mu + 4 \frac{\partial \theta_\mu}{\partial n}|_\Gamma,$$

avec

$$(4.7) \quad \tilde{\nabla}^2 \phi_\mu = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \phi_\mu}{\partial n} = \mu \text{ sur } \Gamma, \quad \int_\Omega \phi_\mu dx = 0$$

$$(4.8) \quad \tilde{\nabla}^2 \theta_\mu = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \theta_\mu = \mu \text{ sur } \Gamma.$$

Une *Analyse de Fourier* effectuée sur le demi-espace (cf. [5],[6]) montre que l'opérateur  $S$  défini par (4.5)-(4.8) est *quasi-optimal* en tant qu'opérateur de préconditionnement.

L'algorithme de gradient conjugué correspondant, pour résoudre (4.1), via (4.2), est donné par

#### Etape 0 : Initialisation

$$(4.9) \quad \lambda^0 \text{ est donné.}$$

On résout alors

$$(4.10) \quad \tilde{\nabla}^2 p^0 = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{f} \text{ dans } \Omega, \quad p^0 = \lambda^0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.11) \quad \alpha \tilde{u}^0 - v \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}^0 = \tilde{f} - \tilde{\nabla} p^0 \text{ dans } \Omega, \quad \tilde{u}^0 = \tilde{g} \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.12) \quad -\tilde{\nabla}^2 \psi^0 = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}^0 \text{ dans } \Omega, \quad \psi^0 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

et on définit

$$(4.13) \quad r^0 = - \frac{\partial \psi^0}{\partial n}|_\Gamma$$

Le préconditionnement est obtenu en résolvant

$$(4.14)_1 \quad \nabla^2 \phi^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \phi^0}{\partial n} = r^0 \text{ sur } \Gamma; \int_{\Gamma} \phi^0 d\Gamma = 0,$$

$$(4.14)_2 \quad \nabla^2 \theta^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \theta^0 = r^0 \text{ sur } \Gamma,$$

et on pose

$$(4.15) \quad g^0 = \frac{\alpha}{\nu} \phi^0|_{\Gamma} + 4\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} r^0 + 4 \frac{\partial \theta^0}{\partial n}|_{\Gamma},$$

$$(4.16) \quad w^0 = g^0.$$

Puis, pour  $n \geq 0$ , avec  $\lambda^n, p^n, u^n, \psi^n, r^n, g^n, w^n$  connus, on calcule  $\lambda^{n+1}, p^{n+1}, u^{n+1}, \psi^{n+1}, r^{n+1}, g^{n+1}, w^{n+1}$  comme suit

Etape 1 : Descente

$$(4.17) \quad \nabla^2 \bar{p}^n = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \bar{p}^n = w^n \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.18) \quad \alpha \bar{u}^n - \nu \nabla^2 \bar{u}^n = - \nabla \bar{p}^n \text{ dans } \Omega, \quad \bar{u}^n = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.19) \quad -\nabla^2 \bar{\psi}^n = \nabla \cdot \bar{u}^n \text{ dans } \Omega, \quad \bar{\psi}^n = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.20) \quad \rho_n = - \frac{\int_{\Gamma} r^n g^n d\Gamma}{\int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{\psi}^n}{\partial n} w^n d\Gamma}.$$

On définit alors  $\lambda^{n+1}, p^{n+1}, u^{n+1}, \psi^{n+1}$  et  $r^{n+1}$  par

$$(4.21) \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n - \rho_n w^n,$$

$$(4.22) \quad p^{n+1} = p^n - \rho_n \bar{p}^n,$$

$$(4.23) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_n \bar{u}^n,$$

$$(4.24) \quad \psi^{n+1} = \psi^n - \rho_n \bar{\psi}^n,$$

$$(4.25) \quad r^{n+1} = r^n + \rho_n \frac{\partial \bar{\psi}^n}{\partial n}.$$

Etape 2 : Construction de la nouvelle direction de descente

On résout

$$(4.26) \quad \nabla^2 \bar{\phi}^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \bar{\phi}^{n+1}}{\partial n} = r^{n+1} \text{ sur } \Gamma, \quad \int_{\Gamma} \bar{\phi}^{n+1} d\Gamma = 0,$$

$$(4.27) \quad \nabla^2 \bar{\theta}^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \bar{\theta}^{n+1} = r^{n+1} \text{ sur } \Gamma,$$

et on définit  $g^{n+1}$  par

$$(4.28) \quad g^{n+1} = \frac{\alpha}{\nu} \bar{\phi}^{n+1}|_{\Gamma} + 4\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} r^{n+1} + 4 \frac{\partial \bar{\theta}^{n+1}}{\partial n}|_{\Gamma}.$$

On calcule alors

$$(4.29) \quad \gamma_n = \frac{\int_{\Gamma} r^{n+1} g^{n+1} d\Gamma}{\int_{\Gamma} r^n g^n d\Gamma},$$

$$(4.30) \quad w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n w^n.$$

On fait alors  $n = n+1$  et on va en (4.17).

4.2. Le cas compressible

Les sous-problèmes (3.5) et (3.7) sont des cas particuliers de la famille ci-dessous de systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires

$$(4.31) \quad \alpha \sigma + \nabla \cdot \underline{u} = g \text{ dans } \Omega,$$

$$(4.32) \quad \alpha \underline{u} - a\mu \nabla^2 \underline{u} + \beta \nabla \sigma = f \text{ dans } \Omega,$$

$$(4.33) \quad \alpha T - a\pi \nabla^2 T = h \text{ dans } \Omega,$$

avec les conditions aux limites :

$$(4.34) \quad \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_B, \quad \underline{u} = \underline{u}_{\infty} \text{ sur } \Gamma_{\infty}^-, \quad a\mu \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} - \beta \sigma \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{\infty}^+,$$

$$(4.35) \quad T = T_B \text{ sur } \Gamma_B, \quad T = T_{\infty} \text{ sur } \Gamma_{\infty}^-, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\infty}^+,$$

dans (4.31)-(4.33),  $\alpha$  est un paramètre positif.

La résolution du problème elliptique (4.33), (4.35) est tout à fait classique et ne sera donc pas considérée dans ce rapport ; concernant plus particulièrement (4.31), (4.32), (4.34), on remarque que ce système elliptique peut être vu comme une généralisation du problème de Stokes (4.1) ; en fait, on rencontre des équations du même type dans la résolution des *équations de Saint-Venant* (shallow water equations) (cf. [7] et les références correspondantes). La méthodologie développée au n° 4.1 pour le cas incompressible peut être généralisée ici ; on va donc considérer de façon plus détaillée la résolution du problème (4.31), (4.32), (4.34) par des méthodes, directes ou itératives, basées sur la décomposition (de type Helmholtz) ci-dessous, le but de cette méthode étant de ramener la résolution du problème ci-dessus à celle d'un nombre fini de problèmes de type Poisson couplés à la résolution d'une équation intégrale sur  $\Gamma (= \Gamma_B \cup \Gamma_\infty^+ \cup \Gamma_\infty^-)$ . Prenant la divergence des deux membres de l'équation (4.32), on obtient :

$$(4.36) \quad \alpha \nabla \cdot \underline{\underline{u}} - \alpha \mu \Delta(\nabla \cdot \underline{\underline{u}}) + \beta \Delta \sigma = \nabla \cdot \underline{\underline{f}} ;$$

d'autre part, il résulte de (4.31) que

$$(4.37) \quad \nabla \cdot \underline{\underline{u}} = g - \alpha \sigma .$$

D'où, par combinaison de (4.36), (4.37),

$$(4.38) \quad \alpha^2 \sigma - (\beta + \alpha \mu) \Delta \sigma = \alpha g - \nabla \cdot \underline{\underline{f}} - \alpha \mu \Delta g .$$

A l'équation elliptique (4.38), on adjoint la condition aux limites (de type Dirichlet)

$$(4.39) \quad \sigma = \lambda \quad \text{sur } \Gamma .$$

Si  $\lambda$  est connue, on déduit  $\sigma$ , via (4.38), puis  $\underline{\underline{u}}$  via (4.32), (4.34) ; on va ajuster  $\lambda$  de telle façon que (4.31) soit satisfaite. Pour cela, il est commode d'introduire  $\psi$  solution de

$$(4.40) \quad \alpha^2 \psi - \zeta \Delta \psi = \alpha \sigma + \nabla \cdot \underline{\underline{u}} - g ,$$

$$(4.41) \quad \psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

avec  $\zeta = \beta + \alpha\mu$ . On démontrerait aisément que la fonction  $\psi$  vérifie l'équation *biharmonique*

$$(4.42) \quad \alpha^2 \psi - (\zeta + \alpha\mu) \Delta \psi + \alpha\mu \zeta \Delta^2 \psi = 0 ;$$

si on peut montrer que  $\psi \equiv 0$ , alors l'équation (4.31) sera satisfaite.

Une condition *suffisante* est, bien entendu, de choisir  $\lambda$  de telle façon que

$$(4.43) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma .$$

Montrons que cela est possible ; on introduit pour cela l'opérateur *linéaire* A défini comme suit :

La fonction  $\lambda$  étant définie sur  $\Gamma$ , on résout les problèmes elliptiques suivants :

$$(4.44) \quad \begin{cases} \alpha^2 \sigma_\lambda - \zeta \Delta \sigma_\lambda = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_\lambda = \lambda & \text{sur } \Gamma , \end{cases}$$

$$(4.45) \quad \begin{cases} \alpha \tilde{u}_\lambda - \alpha \mu \Delta \tilde{u}_\lambda = -\beta \nabla \sigma_\lambda & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}_\lambda = 0 & \text{sur } \Gamma_B \cup \Gamma_\infty^- \\ \alpha \mu \frac{\partial \tilde{u}_\lambda}{\partial n} - \beta n \sigma_\lambda = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty^+ , \end{cases}$$

$$(4.46) \quad \begin{cases} \alpha^2 \psi_\lambda - \zeta \Delta \psi_\lambda = \alpha \sigma_\lambda + \nabla \cdot \tilde{u}_\lambda & \text{dans } \Omega , \\ \psi_\lambda = 0 & \text{sur } \Gamma , \end{cases}$$

et on définit l'opérateur A par

$$(4.47) \quad A\lambda = - \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial n} \Big|_\Gamma .$$

Montrons que A est un opérateur *symétrique* et *défini positif* ; il résulte en effet de (4.44), (4.46) (et de la formule de Green) que



$$(4.49) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle A\lambda_1, \lambda_2 \rangle &= \frac{\alpha}{\zeta} \int_{\Omega} \sigma_1 \sigma_2 \, dx \\ &+ \frac{1}{\beta \zeta} \int_{\Omega} [\alpha \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 + a\mu \, \underline{\nabla} \underline{u}_1 \cdot \underline{\nabla} \underline{u}_2] \, dx, \end{aligned} \right.$$

où  $\sigma_1, \underline{u}_1$  (resp.  $\sigma_2, \underline{u}_2$ ) sont les solutions de (4.44), (4.45) correspondant à  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ). Au vu de (4.49), il est évident que  $A$  est *symétrique* ; de même, combinant (4.49) et (4.44), (4.45), on montre facilement que  $A$  est *défini positif*.

Appliquons les résultats ci-dessus à la résolution du problème (4.31), (4.32), (4.34) ; on introduit pour cela  $\sigma_o, \underline{u}_o$  et  $\psi_o$ , respectivement solutions de

$$(4.50) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 \sigma_o - \zeta \Delta \sigma_o &= \alpha g - \underline{\nabla} \cdot \underline{f} - a\mu \Delta g \quad \text{dans } \Omega, \\ \sigma_o &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \right.$$

$$(4.51) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha \underline{u}_o - a\mu \Delta \underline{u}_o &= \underline{f} - \beta \underline{\nabla} \sigma_o \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{u}_o &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_B, \underline{u}_o = \underline{u}_\infty \quad \text{sur } \Gamma_\infty^-, \\ \frac{\partial \underline{u}_o}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty^+, \end{aligned} \right.$$

$$(4.52) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 \psi_o - \zeta \Delta \psi_o &= \alpha \sigma_o + \underline{\nabla} \cdot \underline{u}_o - g \quad \text{dans } \Omega \\ \psi_o &= 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \right.$$

Par soustraction et comparaison entre (4.31), (4.32), (4.34), et (4.50)-(4.52), on montrerait aisément que la trace  $\lambda$  de  $\sigma$  sur  $\Gamma$  vérifie l'équation (pseudo-différentielle)

$$(4.53) \quad A\lambda = \frac{\partial \psi_o}{\partial n} \Big|_{\Gamma}.$$

Une première possibilité pour résoudre (4.53) est d'utiliser une *méthode quasi-directe* au sens de [2, chapitre 7] et [4] ; cela nécessitera la construction (coûteuse en dimension 3) de l'opérateur  $A$ . Pour remédier à cet inconvénient,

on peut généraliser l'approche du n° 4.1 (cas incompressible) au cas compressible en cours de discussion ; pour cela, on peut là aussi utiliser l'Analyse de Fourier pour résoudre exactement (4.31), (4.32), (4.34) quand  $\Omega$  est un demi-espace avec  $\Gamma_B = \Gamma$ . De même, l'algorithme de gradient conjugué (4.9)-(4.30) peut être généralisé au problème ci-dessus, on utilisera alors comme opérateur de préconditionnement l'opérateur  $S$  défini par

$$(4.54) \quad S^{-1} = B,$$

$$(4.55) \quad Bz = c \phi_z|_{\Gamma} + 2z + \frac{1}{c} \frac{\partial \theta_z}{\partial n}|_{\Gamma}$$

avec

$$(4.56) \quad \alpha^2 \phi_z - \zeta \nabla^2 \phi_z = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \phi_z}{\partial n} = z \text{ sur } \Gamma$$

$$(4.57) \quad \alpha^2 \theta_z - \zeta \nabla^2 \theta_z = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \theta_z = z \text{ sur } \Gamma,$$

$$(4.58) \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\zeta}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{\alpha a \mu} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{\alpha a \mu}{\zeta}} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\},$$

où

$$(4.59) \quad \zeta = \beta + \alpha a \mu.$$

Le paramètre  $c$  apparaît de façon naturelle lors de l'Analyse de Fourier de l'opérateur  $A$  (cf. Appendice 1 et [8]).

## 5. Résolution des problèmes non linéaires par des algorithmes du type GMRES

### 5.1. Généralités

Parmi les diverses méthodes numériques qui peuvent être utilisées pour la résolution des problèmes non linéaires de grande dimension, nous mentionnerons les méthodes de moindres carrés non linéaires dans la mesure où ces méthodes ont été appliquées avec succès - couplées à des algorithmes de gradient conjugué - à la résolution de problèmes compliqués provenant de la mécanique des fluides (cf. e.g. [2], [3], [9] pour ces applications).

Un des inconvénients majeurs des méthodes ci-dessus est qu'elles exigent une connaissance précise du gradient de la fonction coût. ce qui, pour certains

problèmes est une opération coûteuse en elle-même (cela semble être le cas par exemple pour les équations de Navier-Stokes compressibles).

Plus récemment divers chercheurs ont introduit des variantes des méthodes ci-dessus qui n'exigent pas la connaissance exacte du gradient. Parmi ces méthodes, GMRES (cf. [1]) a montré des possibilités intéressantes pour les problèmes non linéaires (cf. [10],[11] pour la théorie et les applications de GMRES en Mécanique des Fluides). Dans le paragraphe suivant, on va décrire dans le contexte des espaces de Hilbert abstraits, une généralisation de GMRES dont les variantes en dimension finie peuvent s'interpréter comme des versions préconditionnées de l'algorithme original. En fait, ces méthodes ont déjà été appliquées aux équations d'Euler compressibles (cf. e.g. [11],[12]).

## 5.2. L'algorithme GMRES pour les problèmes non linéaires

L'application des méthodes de décomposition d'opérateurs aux équations de Navier-Stokes conduit à la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, qui eux-mêmes se ramènent à des systèmes non linéaires en dimension finie une fois qu'ils ont été approchés par des méthodes d'éléments finis, de différences finies ou par des méthodes spectrales. Tous ces problèmes rentrent dans le cadre général suivant :

Soit  $V$  un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire  $(.,.)$  et la norme associée  $\|.\|$ . On note par  $V'$  l'espace dual de  $V$ , par  $\langle ., . \rangle$  la forme bilinéaire de la dualité entre  $V'$  et  $V$  et finalement par  $S$  l'opérateur de dualité entre  $V$  et  $V'$ , i.e. l'isomorphisme de  $V$  sur  $V'$  vérifiant :

$$\langle Sv, w \rangle = (v, w), \quad \forall v, w \in V,$$

$$\langle Sv, w \rangle = \langle Sw, v \rangle, \quad \forall v, w \in V,$$

$$\langle f, S^{-1}g \rangle = (f, g)_* \quad \forall f, g \in V'.$$

Avec  $F$  un opérateur (éventuellement non linéaire) de  $V$  sur  $V'$ , on considère le problème

$$(5.1) \quad F(u) = 0.$$

Description de GMRES pour la résolution de (5.1) :

$$(5.2) \quad u^0 \in V, \text{ donné ;}$$

alors, pour  $n \geq 0$ ,  $u^n$  étant connu, on détermine  $u^{n+1}$  comme suit :

$$(5.3) \quad r_1^n = S^{-1} F(u^n) ,$$

$$(5.4) \quad w_1^n = r_1^n / \|r_1^n\| .$$

Puis pour  $j = 2, \dots, k$ , on calcule  $r_j^n$  et  $w_j^n$  par

$$(5.5) \quad r_j^n = S^{-1} DF(u^n; w_{j-1}^n) - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij}^{n-1} w_i^n ,$$

$$(5.6) \quad w_j^n = r_j^n / \|r_j^n\| ;$$

dans (5.5),  $DF(u^n; w)$  est défini soit par

$$(5.7)_1 \quad DF(u^n; w) = F'(u^n) \cdot w$$

(où  $F'(u^n)$  est la différentielle de  $F$  en  $u^n$ ), soit, si le calcul de  $F'(u^n)$  est trop coûteux, par

$$(5.7)_2 \quad DF(u^n; w) = \frac{F(u^n + \varepsilon w) - F(u^n)}{\varepsilon}$$

avec  $\varepsilon (> 0)$  suffisamment petit ; on définit alors  $b_{il}^n$  par

$$(5.8) \quad b_{il}^n = \langle DF(u^n; w_l^n), w_i^n \rangle \quad ( = (S^{-1} DF(u^n; w_l^n), w_i^n) ) .$$

Ensuite, on résout

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{a}^n = \{a_j^n\}_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k, \text{ tel que,} \\ \forall \tilde{b} = \{b_j\}_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k, \text{ on ait} \\ \|F(u^n + \sum_{j=1}^k a_j^n w_j^n)\|_* \leq \|F(u^n + \sum_{j=1}^k b_j w_j^n)\|_* \end{array} \right.$$

et on obtient  $u^{n+1}$  par

$$(5.10) \quad u^{n+1} = u^n + \sum_{j=1}^k a_j^n w_j^n. \quad \square$$

On fait ensuite  $n = n+1$  et on va en (5.3).

Dans l'algorithme (5.2)-(5.10),  $k$  est la dimension de l'espace dit de Krylov.

Remarque 5.1. : On montrerait facilement que

$$(5.11) \quad (w_j^n, w_\ell^n) = 0, \quad \forall 1 \leq \ell, j \leq k, \quad j \neq \ell.$$

Remarque 5.2. : Pour calculer  $DF(u^n; w)$ , on peut utiliser au lieu de (5.7)<sub>2</sub>, l'approximation (au second ordre) de  $F'(u^n) \cdot w$  définie par

$$(5.12) \quad DF(u^n; w) = \frac{F(u^n + \varepsilon w) - F(u^n - \varepsilon w)}{2\varepsilon};$$

le choix de la valeur de  $\varepsilon$  dans (5.7)<sub>2</sub> ou (5.12) peut s'effectuer automatiquement par contrôle de la variation de  $DF(u^n, w)$  (cf. e.g. [13]).

Remarque 5.3. : La norme  $\|\cdot\|_*$  dans (5.9), satisfait les relations ci-dessous

$$(5.13) \quad \|f\|_* = \|S^{-1}f\|, \quad \forall f \in V',$$

$$(5.14) \quad \|f\|_* = \langle f, S^{-1}f \rangle^{1/2}, \quad \forall f \in V';$$

en pratique, on utilise (5.13) pour évaluer les diverses normes  $\|\cdot\|_*$  intervenant dans (5.9).

Remarque 5.4. : Dans le but d'évaluer  $\tilde{a}^n$  via la résolution de (5.9), il suffit (en général) d'approcher - au voisinage de  $\tilde{b} = 0$  - la fonctionnelle

$$(5.15)_1 \quad \tilde{b} \rightarrow \left\| F(u^n + \sum_{j=1}^k b_j w_j^n) \right\|_*$$

par la fonctionnelle quadratique définie par

$$(5.15)_2 \quad \tilde{b} \rightarrow \left\| F(u^n + \sum_{j=1}^k b_j DF(u^n; w_j^n)) \right\|_*^2.$$

Minimiser la fonctionnelle (5.15)<sub>2</sub> équivaut à résoudre un système linéaire dont la matrice  $k \times k$  est symétrique et définie positive (cette approche équivaut à prendre pour  $\tilde{a}^n$  le premier itéré de la méthode de Newton appliquée à la résolution de (5.9) et initialisée par  $\tilde{b} = 0$ ).

### 5.3. Application à la simulation d'écoulements visqueux

On se limite au cas incompressible dont le formalisme est beaucoup plus simple. Il résulte du n° 3 que les méthodes de décomposition d'opérateurs conduisent à la résolution de problèmes elliptiques non linéaires tels que

$$(5.16) \quad \begin{cases} \alpha \tilde{u} - \nu \nabla^2 \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le problème (5.16) admet la *formulation variationnelle*

$$(5.17) \quad \begin{cases} \tilde{u} \in V_g (= \{ \tilde{v} \mid \tilde{v} \in H^1(\Omega)^N, \tilde{v} = \tilde{g} \text{ sur } \Gamma \}), \\ \alpha \int_{\Omega} \tilde{u} \cdot \tilde{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} \, dx + \int_{\Omega} (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} \cdot \tilde{v} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \tilde{v} \, dx, \quad \forall \tilde{v} \in V_0 \end{cases}$$

où  $V_0 = H_0^1(\Omega)^N$ .

En fait, le problème (5.16), (5.17) est un cas particulier de (5.1) ; pour le résoudre par l'algorithme GMRES, on va considérer  $V_g$  comme un sous-espace de  $H^1(\Omega)^N$ , cet espace étant muni du produit scalaire

$$\{ \tilde{v}, \tilde{w} \} \rightarrow \alpha \int_{\Omega} \tilde{v} \cdot \tilde{w} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{w} \, dx,$$

et de la norme

$$\left\{ \alpha \int_{\Omega} |\tilde{v}|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \tilde{v}|^2 \, dx \right\}^{1/2}.$$

Une fois que ce choix a été fait, appliquer l'algorithme (5.2)-(5.10) est évident et on obtient alors la méthode itérative ci-dessous :

Etape 0 : Initialisation

$$(5.18) \quad \underline{u}^0 \in V_g \text{ est donné ;}$$

pour  $n \geq 0$ ,  $\underline{u}^n$  étant connu, on obtient  $\underline{u}^{n+1}$  comme suit :

Etape 1 : Construction de l'espace de Krylov

Résoudre

$$(5.19) \quad \begin{cases} \alpha \int_{\Omega} \underline{r}_1^n \cdot \underline{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \underline{\nabla} \underline{r}_1^n \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \, dx = \alpha \int_{\Omega} \underline{u}^n \cdot \underline{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \underline{\nabla} \underline{u}^n \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \, dx \\ + \int_{\Omega} (\underline{u}^n \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}^n \cdot \underline{v} \, dx - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} \, dx, \quad \forall \underline{v} \in V_0 ; \\ \underline{r}_1^n \in V_0, \end{cases}$$

puis poser

$$(5.20) \quad \underline{w}_1^n = \underline{r}_1^n / \left( \alpha \int_{\Omega} |\underline{r}_1^n|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\underline{\nabla} \underline{r}_1^n|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Alors, pour  $j = 2, \dots, k$ , on calcule  $\underline{r}_j^n$  et  $\underline{w}_j^n$  via la résolution de

$$(5.21) \quad \begin{cases} \alpha \int_{\Omega} \underline{r}_j^n \cdot \underline{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \underline{\nabla} \underline{r}_j^n \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \, dx = \langle DF(\underline{u}_j^n; \underline{w}_{j-1}^n), \underline{v} \rangle \\ - \alpha \int_{\Omega} \underline{s}_{j-1}^n \cdot \underline{v} \, dx - \nu \int_{\Omega} \underline{\nabla} \underline{s}_{j-1}^n \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \, dx, \quad \forall \underline{v} \in V_0 ; \\ \underline{r}_j^n \in V_0, \end{cases}$$

(où,  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V_0$ , on a

$$(5.22) \quad \begin{cases} \langle DF(\underline{u}^n; \underline{w}), \underline{v} \rangle = \alpha \int_{\Omega} \underline{w} \cdot \underline{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \underline{\nabla} \underline{w} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \, dx \\ + \int_{\Omega} (\underline{u}^n \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} \cdot \underline{v} \, dx + \int_{\Omega} (\underline{w} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}^n \cdot \underline{v} \, dx, \end{cases}$$

et aussi

$$(5.23) \quad \underline{s}_{j-1}^n = \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij-1} \underline{w}_i^n,$$

avec

$$(5.24) \quad b_{i\ell}^n = \langle DF(u^n; \tilde{w}_\ell^n), \tilde{w}_i^n \rangle$$

et en posant

$$(5.25) \quad \tilde{w}_j^n = \tilde{r}_j^n / (\alpha \int_{\Omega} |\tilde{r}_j^n|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \tilde{r}_j^n|^2 dx)^{1/2}.$$

Etape 2 : Calcul de  $\tilde{u}^{n+1}$  par minimisation dans l'espace de Krylov

On résout dans  $\mathbb{R}^k$  le problème de minimisation (de type moindres carrés non linéaires)

$$(5.26) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{a}^n = \{a_j^n\}_{j=1}^k \text{ tel que} \\ j_n(\tilde{a}^n) \leq j_n(\tilde{b}), \forall \tilde{b} \in \mathbb{R}^k, \end{cases}$$

où

$$(5.27) \quad j_n(\tilde{b}) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\tilde{y}|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \tilde{y}|^2 dx,$$

avec  $\tilde{y} (= \tilde{y}^n(\tilde{b}))$  la solution du système elliptique

$$(5.28) \quad \begin{cases} \alpha \tilde{y} - \nu \nabla^2 \tilde{y} = \alpha \tilde{u}^n(\tilde{b}) - \nu \nabla^2 \tilde{u}^n(\tilde{b}) + (\tilde{u}^n(\tilde{b}) \cdot \nabla) \tilde{u}^n(\tilde{b}) - \tilde{f} \text{ dans } \Omega \\ \tilde{y} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

$$(5.29) \quad \tilde{u}^n(\tilde{b}) = \tilde{u}^n + \sum_{j=1}^k b_j \tilde{w}_j^n.$$

On a finalement

$$(5.30) \quad \tilde{u}^{n+1} = \tilde{u}^n + \sum_{j=1}^k a_j^n \tilde{w}_j^n. \quad \square$$

On fait  $n = n+1$  et on va en (5.19).

Remarque 5.5. : Le problème (5.26) est conceptuellement très voisin des formulations par moindres carrés des équations de Navier-Stokes considérées en [2], [3]; on peut donc les résoudre par gradient conjugué, comme dans les références



ci-dessus. Cependant, en vue de réduire la complexité des algorithmes ci-dessus on tiendra compte d'abord de la Remarque 5.4 et on calculera  $\tilde{a}^n$  par une itération de la méthode de Newton partant de  $\tilde{b} = 0$ . Des essais numériques ont validé le bien fondé de cette approche ; en fait les performances de GMRES sont améliorées si on utilise une stratégie de "back-tracking" au sens de [1, n° 3] .  $\square$

L'extension de la méthodologie ci-dessus au cas compressible est à peu près immédiate ; il résulte du n° 2 (et de [3]) que le système à résoudre est donné par

$$(5.31) \quad \begin{cases} \alpha \sigma + \underline{u} \cdot \nabla \sigma = g , \\ \alpha \underline{u} - b\mu \Delta \underline{u} - \underline{\psi}(\sigma, \underline{u}, T) = \underline{f} , \\ \alpha T - b\pi \Delta T - \chi(\sigma, \underline{u}, T) = h , \end{cases}$$

avec des conditions aux limites appropriées. Dans (5.31),  $\alpha$  est un paramètre positif et  $g, \underline{f}, h$  sont des fonctions données. Dans ce contexte, on utilise l'algorithme GMRES du n° 5.2 en prenant pour opérateur de préconditionnement l'opérateur elliptique associée à la norme produit

$$\{\phi, \underline{v}, \theta\} \rightarrow \left\{ \alpha \int_{\Omega} \phi^2 dx + \alpha A \int_{\Omega} \underline{v}^2 dx + b\mu A \int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^2 dx \right. \\ \left. + \alpha B \int_{\Omega} \theta^2 dx + b\pi B \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad A, B > 0, \quad 0 < b < 1,$$

(cf. [3] pour plus de détails).

## 6. Essais numériques

### 6.1. Cas incompressible

Dans ce numéro, on considère la résolution du problème de Stokes par la méthode décrite au n° 4.1. L'approximation des équations de Navier-Stokes est faite par les méthodes d'éléments finis décrites en [2] , [3] ; on a donc utilisé des approximations de la pression continues et affines par morceaux, et une approximation semblable pour la vitesse sur la grille plus fine définie en joignant les points milieux des côtés des triangles de la grille de pression (cf. Figure 6.1 et [2] , [3] pour plus de détails).

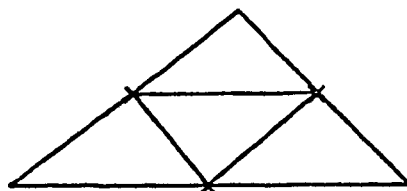
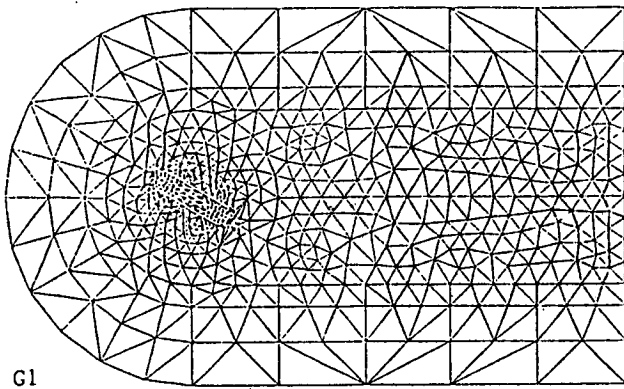


Figure 6.1.

Afin de vérifier l'efficacité de l'algorithme (4.9)-(4.30), on a considéré des écoulements visqueux incompressibles autour et à l'intérieur de l'entrée d'air bi-dimensionnelle des Figures 6.2(a), 6.2(b), 6.2(c) où les grilles de pression utilisées pour les calculs sont visualisées. Sur les Figures 6.3(a) et (b) on a montré pour l'algorithme (4.9)-(4.30) (en fait pour un analogue discret de cet algorithme) la variation de la quantité

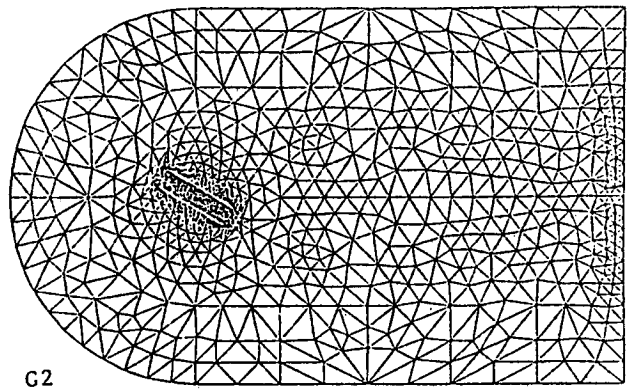
$$\epsilon = 2 \operatorname{Log} \frac{\|g^n\|_{L^2(\Gamma)}}{\|g^0\|_{L^2(\Gamma)}}$$

en fonction du nombre d'itérations (Fig. 6.3(a)), et aussi le temps C.P.U. (Fig. 6.3(b)) pour les trois discrétisations ci-dessus. On a aussi comparé les performances de l'algorithme (4.9)-(4.30) (graphes 1', 2', 3') avec celles de l'algorithme standard (graphes 1, 2, 3) pour lequel on a  $S = I$  (cet algorithme est décrit dans e.g. [2], [4]). La méthodologie ci-dessus est évidemment applicable aux équations de Navier-Stokes via les méthodes de décomposition d'opérateurs décrites au n° 3. Les Figures 6.4(a) et 6.4(b) montrent à  $t = 1$  (pour  $1/\Delta t \sim \alpha = 10$ ) et pour  $Re = 1$  (graphes 1 et 1') et  $Re = 200$  (graphes 2 et 2') l'accélération de la convergence, mesurée en nombre d'itérations (Fig. 6.4(a)) et en temps C.P.U. (Figure 6.4(b)). On remarque que l'efficacité du préconditionnement (4.6) augmente avec  $Re/\Delta t$  ce qui est une propriété intéressante en vue des écoulements à grand nombre de Reynolds, pour lesquels on doit prendre  $\Delta t$  assez petit pour suivre avec précision l'évolution des phénomènes instationnaires.



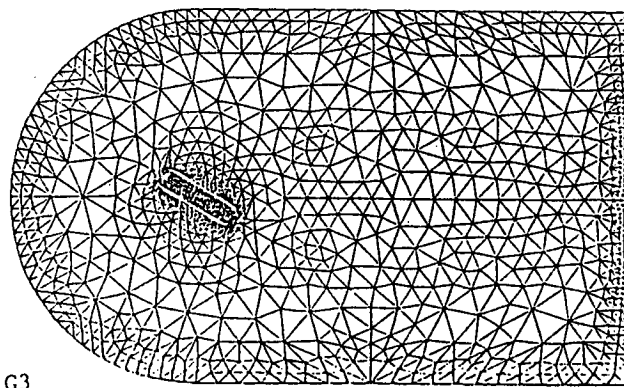
G1

(a) NF = 102



G2

(b) NF = 204



G3

(c) NF = 276

Figure 6.2.

Triangulations utilisées pour l'approximation de la pression

NF : noeuds frontière

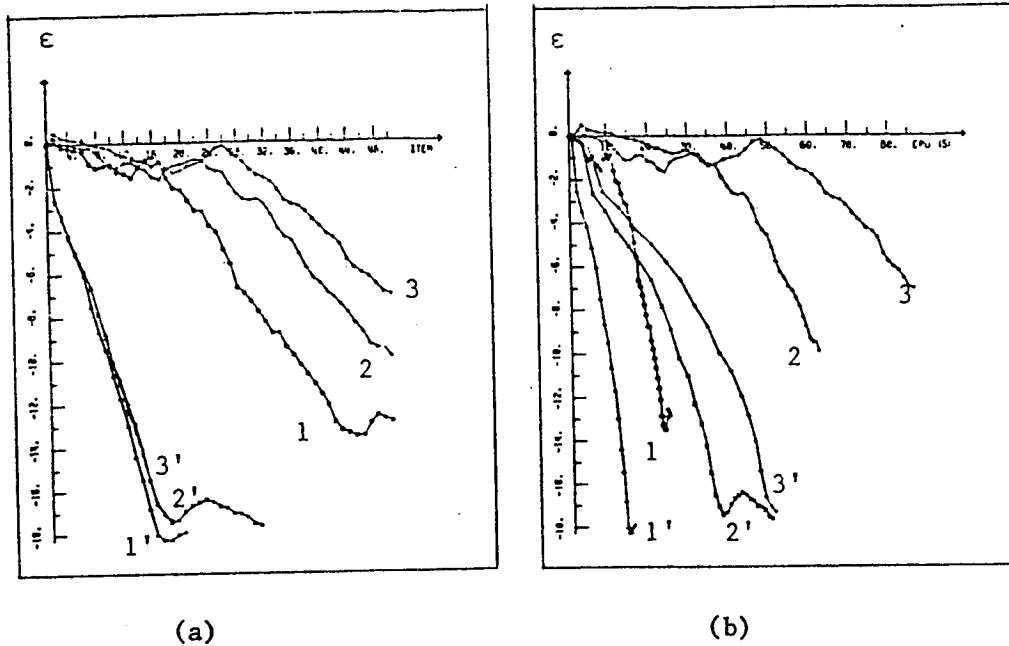


Figure 6.3.

Influence du nombre de noeuds frontière  
1,1' sur G1 ; 2,2' sur G2 ; 3,3' sur G3

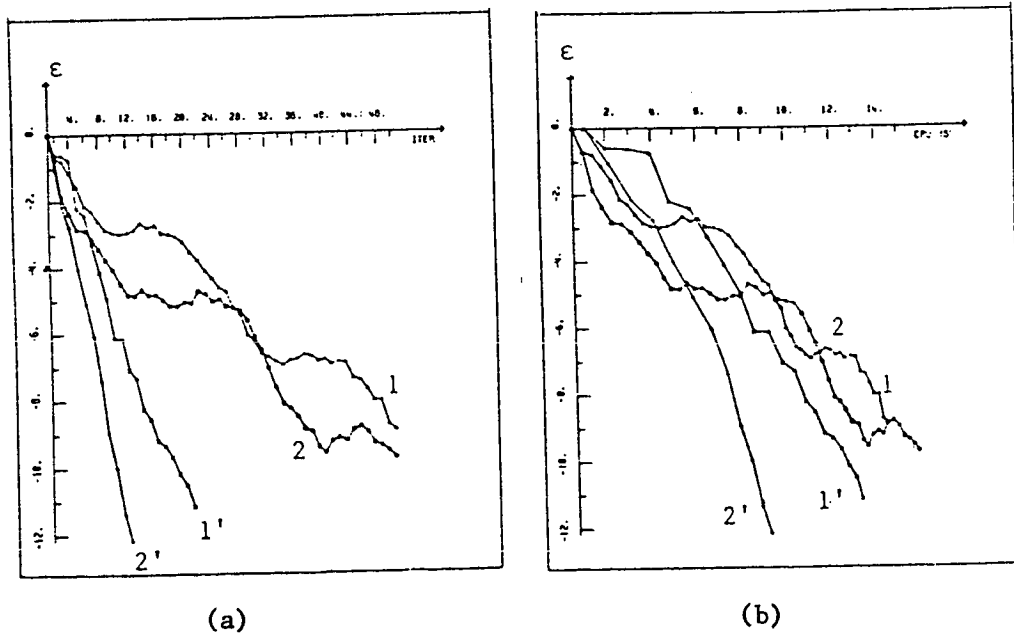


Figure 6.4.

Influence du nombre de Reynolds sur le preconditionnement.

## 6.2. Cas compressible

On présente, dans ce paragraphe, les résultats obtenus pour la simulation numérique d'écoulements visqueux compressibles dans et autour d'entrées d'air, puis autour d'un arrière corps.

Dans un premier temps, on présente les performances associées à l'algorithme itératif introduit au n° 4.2.

L'approximation utilisée est du type suivant :

(i)  $P_1$ -bulle (cf. 3, § 5.13) pour la description du champ de vitesse.

(ii)  $P_1$  pour la description de la densité et de la température.

Les figures 6.5(a), (b) décrivent respectivement la décroissance du résidu en fonction du nombre d'itérations, et du temps CPU ; les maillages utilisés pour ces simulations sont ceux du cas incompressible décrit au n° 6.1. On observe un comportement identique à celui du cas incompressible.

Sur les Figures 6.6(a) et 6.6(b), on observe, là encore, que les vitesses de convergence augmentent avec le rapport  $Re/\Delta t$  (dans les essais numériques, le solveur de Stokes généralisé est combiné cette fois à des solveurs non linéaires via une discrétisation en temps par  $\theta$ -schéma (cf. § 3)).

Il est intéressant d'observer (cf. Figure 6.7) l'accroissement très important du coût de calcul en fonction du nombre de noeuds frontière lorsque l'on utilise une méthode quasi directe de résolution des problèmes de Stokes généralisé au sens de [(3. n° 12)].

Les expériences numériques associées au cas compressible nous ont également servies de bancs d'essais pour les comparaisons entre les méthodes de moindres carrés/gradients conjugués (cf. [3]) et les algorithmes de type GMRES préconditionnés par différents opérateurs (cf. n° 5.2).

Au vu des Figures 6.8(a) et (b), (gradient conjugué) et 6.9(a) et (b) (GMRES), l'algorithme GMRES apparaît nettement plus performant en itérations et temps de calcul (un facteur  $\approx 3$ ) ; ces essais numériques correspondent à des écoulements de fluide visqueux compressible autour de l'arrière corps de la Figure 6.10.

Sur la Figure 6.11, on a représenté les courbes de convergence de l'algorithme GMRES mesurée en temps CPU, pour différents types de préconditionneurs et de solveurs associés (Rel : Relaxation, VDV : factorisation de Choleski incomplète au sens de Van der Vorst, Diag : préconditionnement diagonal).

Par ailleurs, nous avons comparé (cf. Fig. 6.12), les performances des solveurs de Stokes généralisés basés sur un préconditionnement soit par opérateur de bord (cf. n° 6.1) soit par opérateur de Neumann opérant sur la densité dans un algorithme d'Uzawa (cf. [14]). La Figure 6.12 met en évidence un phénomène de "starting up" important qui en première analyse nous paraît être lié à la fabrication du second membre ( $\nabla \cdot \tilde{f}$ ) dans la relation (4.50) lors de l'initialisation de l'algorithme de gradient conjugué. (Ces calculs correspondent également à l'approximation de type  $P_1$ -bulle/ $P_1$  ; cf. ci-dessus).

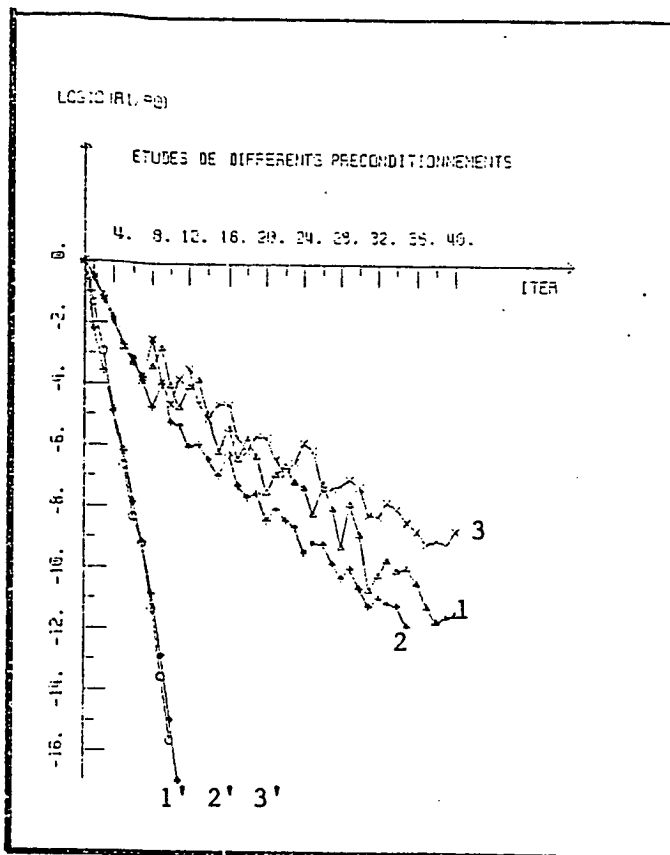
Dans le cas de l'arrière corps 3D de la Figure 6.10, on a représenté, dans un plan méridien, à  $t = 9.5$ , la distribution respective du nombre de Mach, de la densité, de la pression, du module du tourbillon. Le calcul a été effectué avec une approximation  $P_1$ -bulle/ $P_1$ , utilisant un  $\theta$ -schéma, l'algorithme GMRES et un solveur de Stokes généralisé de type Uzawa, préconditionné par l'opérateur de Neumann discret (cf. (3., n° 4)) étendu au cas compressible cf. [14]).

### Conclusion

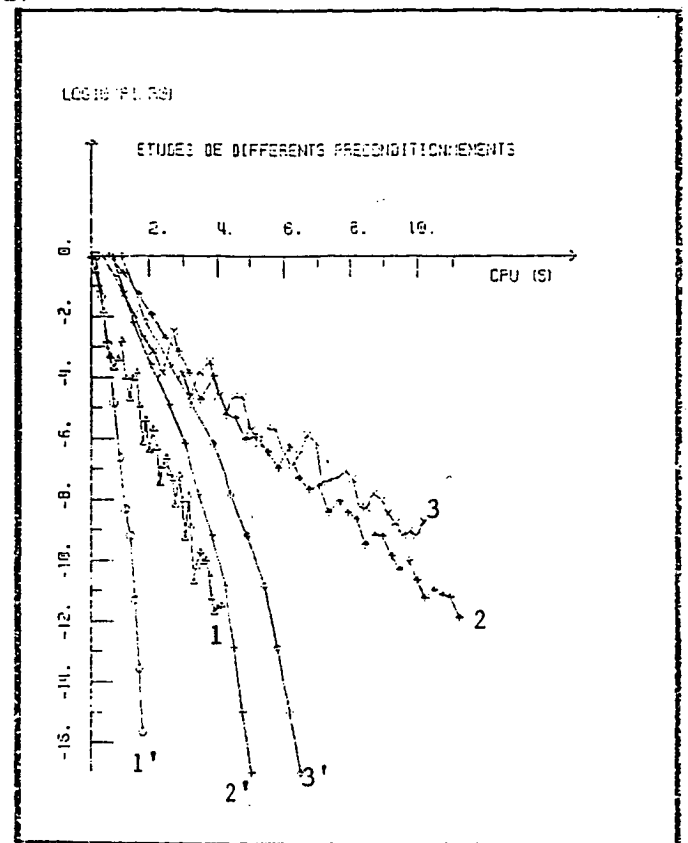
Dans l'état actuel de nos investigations, la présente étude fait apparaître qu'au plan industriel, une stratégie performante pour la simulation numérique des écoulements visqueux compressibles est obtenue en combinant :

- i) des discrétisations en temps par  $\theta$ -schéma,
- ii) des discrétisations en espace de type  $P_1$ -bulle/ $P_1$ ,
- iii) des solveurs non linéaires de type GMRES
- iv) des solveurs de Stokes généralisés de type Uzawa/gradient conjugué préconditionné par des opérateurs de Neumann discrets,
- v) l'utilisation de formulations conservatives pour la simulation numérique à des Mach et des Reynolds élevés.

Il nous apparaît que des accélérations substantielles de convergence s'ajoutant aux précédentes seront obtenues par l'utilisation systématique de solveurs multigrilles pour certaines phases de préconditionnement. Les points ci-dessus seront repris et analysés sur la base d'essais complémentaires dans [14] et [15]. Les applications en cours et envisagées concernent les avions civils et militaires et certaines phases du vol de véhicules hypersoniques.



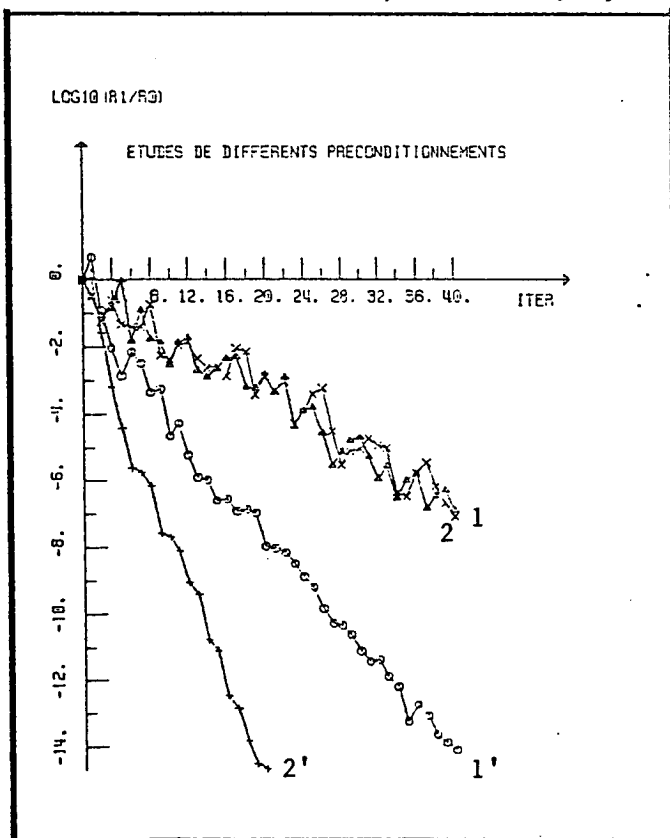
(a)



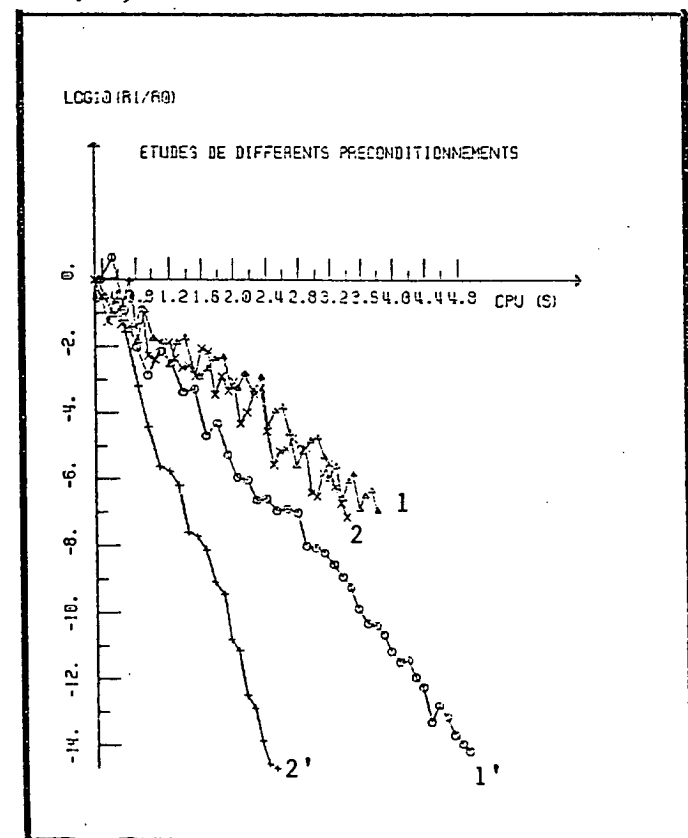
(b)

Figure 6.5.

Influence du nombre de noeuds frontière . Problème de Stokes compressible.  $\Delta t = .1$ ,  $Re = 10000$ .  
1,1' sur G1 ; 2,2' sur G2 ; 3,3' sur G3



(a)



(b)

Figure 6.6.

Influence du nombre de Reynolds sur le préconditionnement  
1,1'  $Re = 500$ . ; 2,2'  $Re = 10000$ .

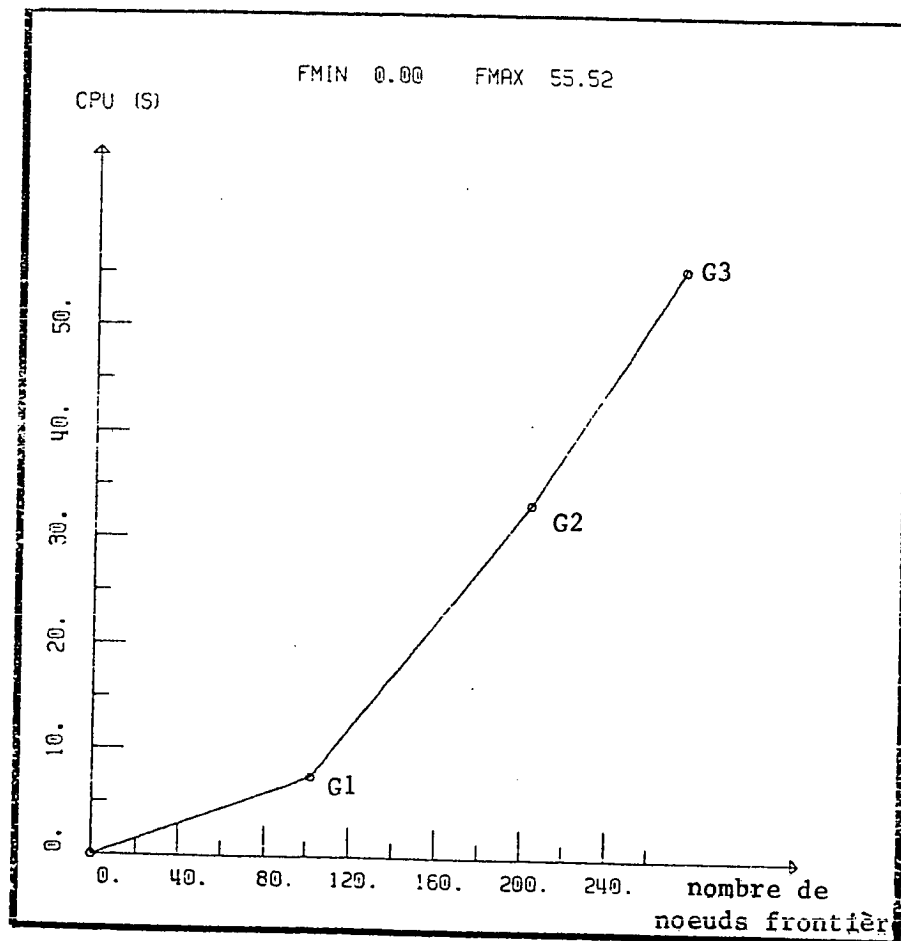
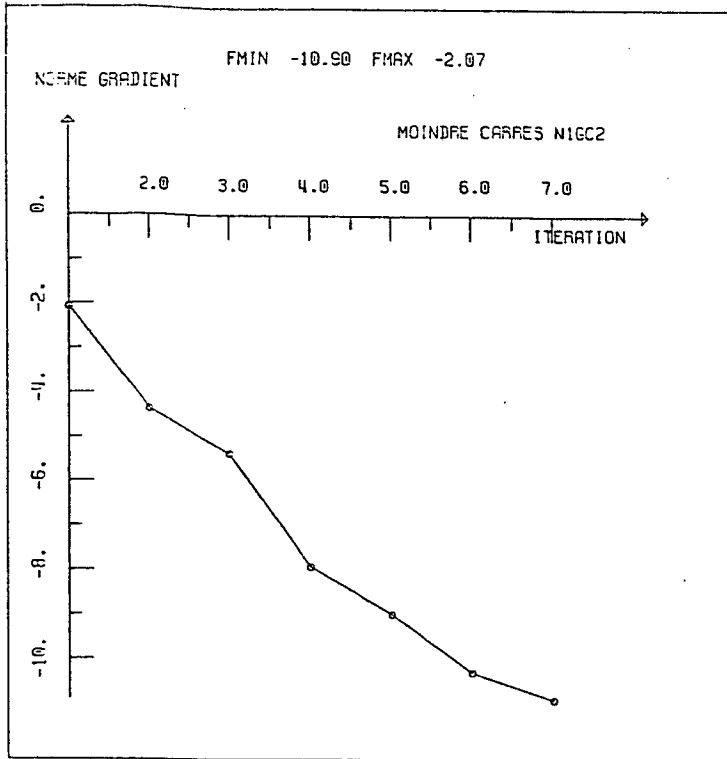


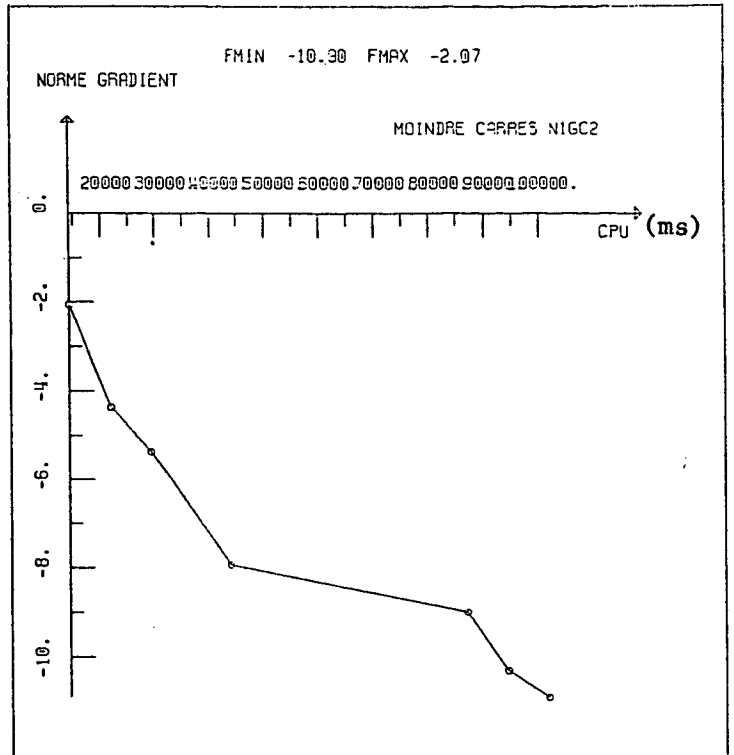
Figure 6.7.

Problème de Stokes compressible. Coût de construction de l'opérateur intégral discret.





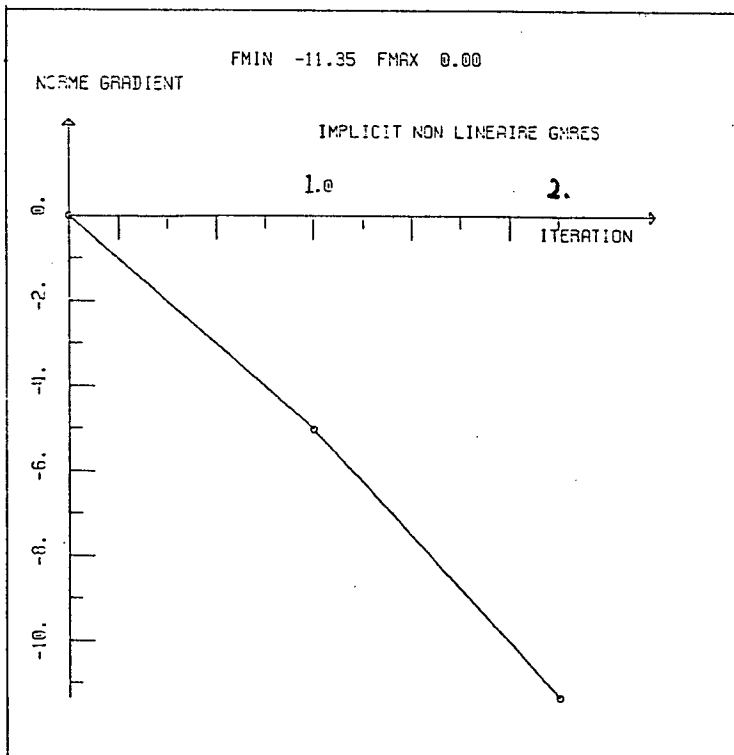
(a)



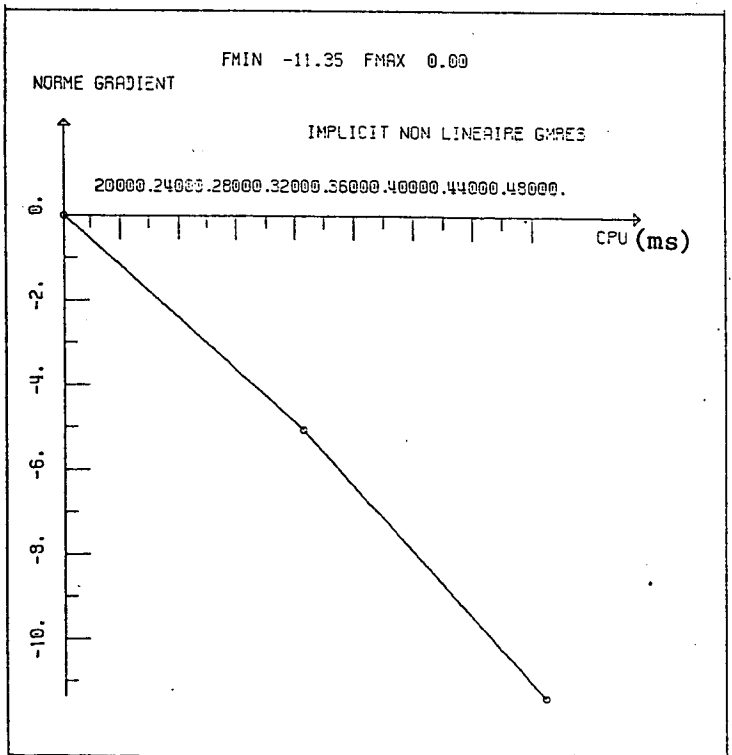
(b)

Figure 6.8.

Résolution du problème non linéaire par moindres carrés/gradient conjugué.



(a)



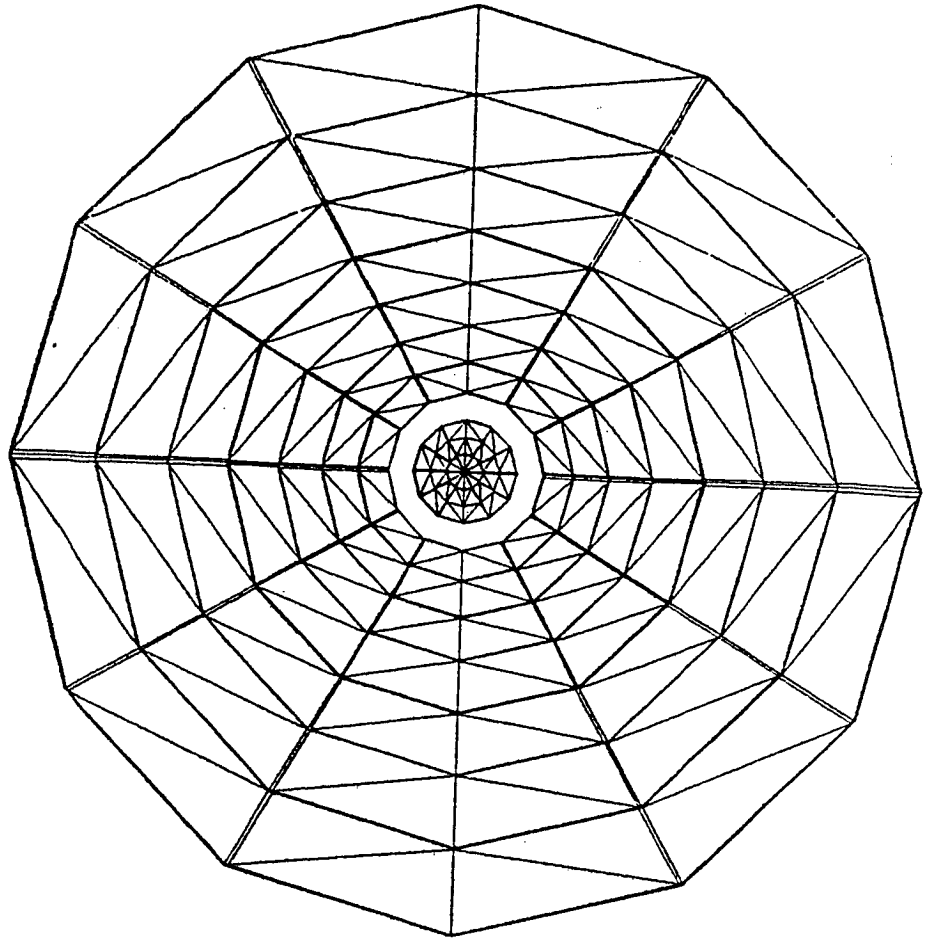
(b)

Figure 6.9.

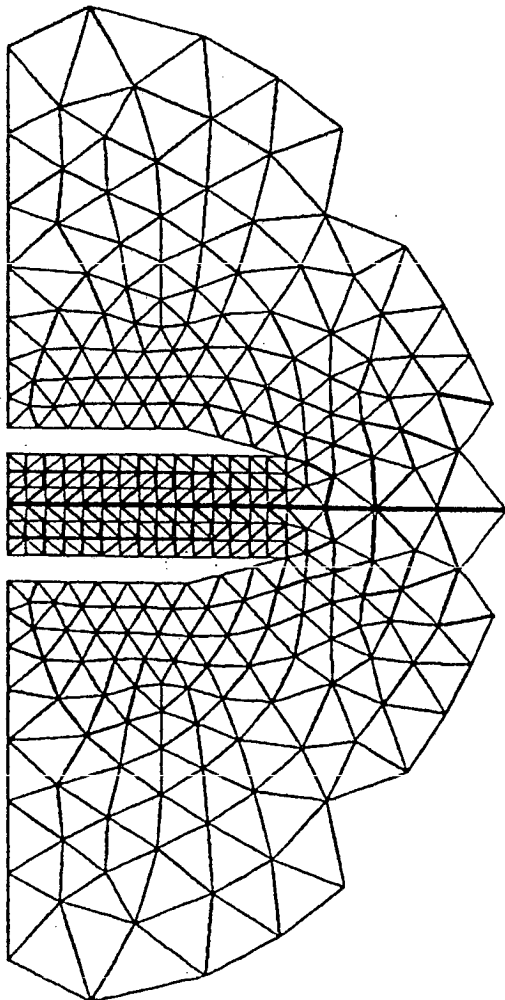
Résolution du problème non linéaire par GMRES.

Figure 6.10.

Maillage 3D pour un  
arrière corps



a ) Coupe transversale



b ) Coupe méridienne

○	P. (A[I-UR*DELTA]) -1 REL	CPU ET ITER A= 100.0 A=100.
△	P. (A[I-UR*DELTA]) -1 REL	CPU ET ITER A= 100.0 A=1000.
+	P. (A[I-UR*DELTA]) -1 REL	CPU ET ITER A= 100.0 A=10000.
×	P. (A[I-UR*DELTA]) -1 VDV	CPU ET ITER A= 100.0 A=100.
◇	P. (A[I-UR*DELTA]) -1 VDV	CPU ET ITER = 100.0 A=1000.
⊕	P. (A[I-UR*DELTA]) -1 VDV	CPU ET ITER = 100.0 A=10000.
×	PREC. DIAG ML	CPU ET ITER A= 100.0 A=100.
⊕	PREC. DIAG ML	CPU ET ITER = 100.0 A=1000.
⊕	PREC. DIAG ML	CPU ET ITER = 100.0 A=10000.

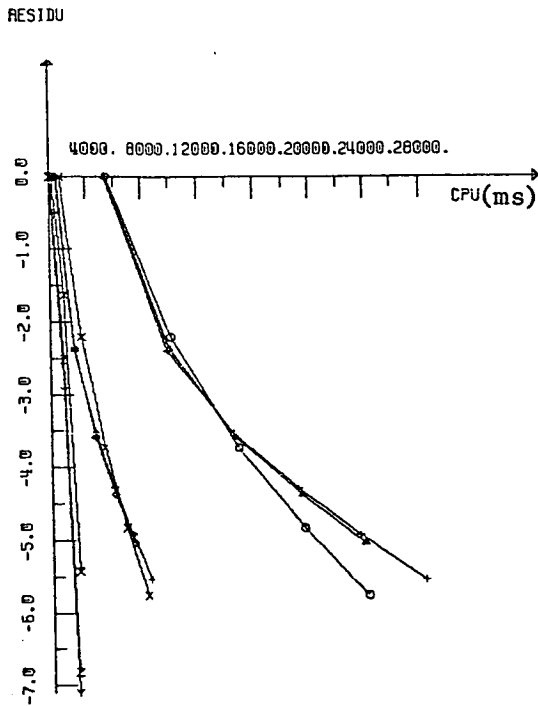


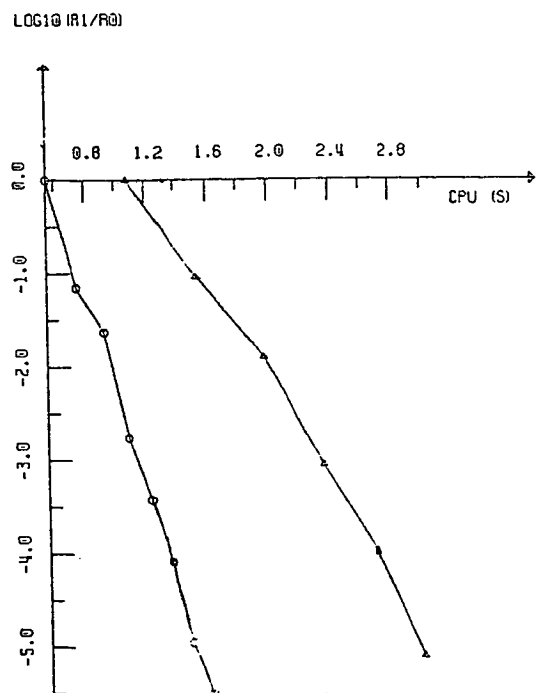
Figure 6.11.

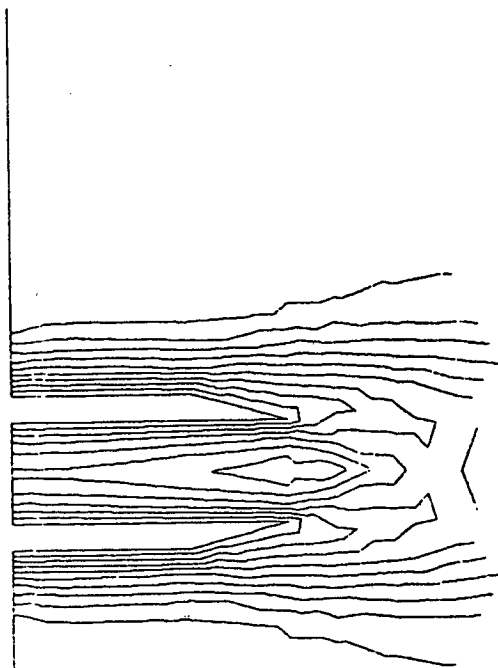
Comparaison de différents préconditionneurs et solveurs pour GMRES.

Figure 6.12.

Comparaison de différents solveurs préconditionnés. Re = 100000.

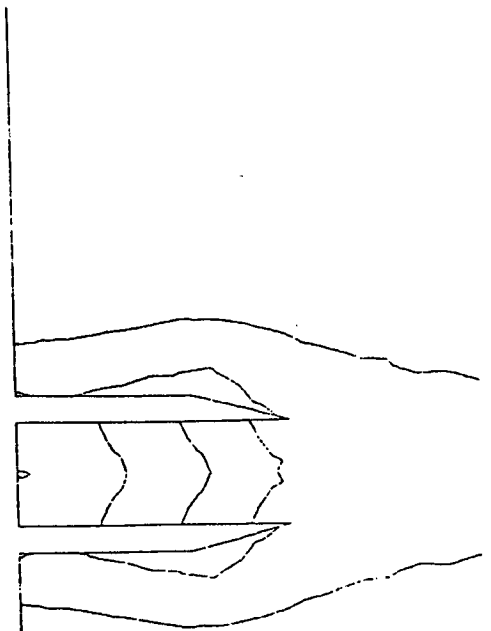
○	UZ	BULLE AVEC PREC QUASI-OPT POUR FOURIER
△	GP	BULLE AVEC PREC QUASI-OPT POUR FOURIER





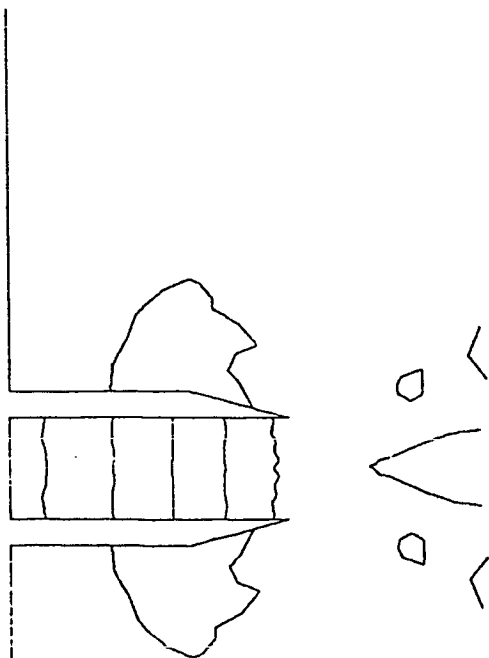
(a)

Lignes iso-mach



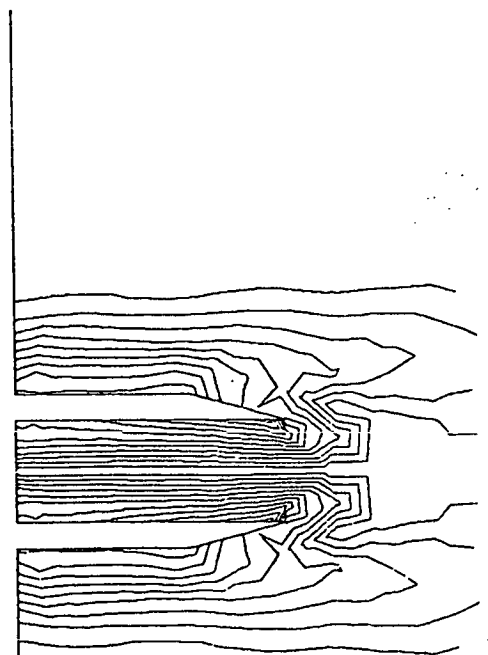
(b)

Lignes iso-densité



(c)

Lignes iso-Cp



(d)

Lignes iso-rotationnel

Figure 6.13.

Calcul 3D autour d'un arrière corps.

## Appendice

---

### Détermination par Analyse de Fourier d'un opérateur de préconditionnement pour les problèmes de Stokes généralisés associés aux écoulements visqueux compressibles

#### 1. Motivation

Le but de cet appendice est la justification des formules données au paragraphe 4.2 à propos des problèmes de Stokes généralisés intervenant dans les écoulements visqueux compressibles (pour le cas incompressible, cf. [8] , donnée également en annexe).

#### 2. Le problème de Stokes généralisé

Il résulte du paragraphe 4.2 que *le problème de Stokes généralisé* est défini par

$$(2.1) \quad \alpha \sigma + \nabla \cdot \underline{u} = g \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.2) \quad \alpha \underline{u} - a \mu \nabla^2 \underline{u} + \beta \nabla \sigma = \underline{f} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(2.3) \quad \underline{u} = \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_B, \quad \underline{u} = \underline{u}_\infty \quad \text{sur } \Gamma_\infty^-, \quad a \mu \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} - \beta n \sigma = \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_\infty^+.$$

Dans cet appendice, on se limitera à des conditions de Dirichlet ; on peut alors montrer (cf. n° 4.2) que la trace  $\lambda$  de  $\sigma$  sur  $\Gamma$  est solution d'un problème de bord associé à l'opérateur A défini comme suit :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \alpha^2 \sigma_\lambda - \zeta \nabla^2 \sigma_\lambda = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_\lambda = \lambda & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} \alpha \underline{u}_\lambda - a \mu \nabla^2 \underline{u}_\lambda = -\beta \nabla \sigma_\lambda & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u}_\lambda = \underline{0} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

$$(2.7) \quad \begin{cases} \alpha^2 \psi_\lambda - \zeta \nabla^2 \psi_\lambda = \alpha \sigma_\lambda + \nabla \cdot \tilde{u}_\lambda & \text{dans } \Omega \\ \psi_\lambda = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

$$(2.8) \quad A\lambda = - \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial n} \Big|_\Gamma$$

avec

$$(2.9) \quad \zeta = \beta + \alpha \mu.$$

### 3. Détermination de A lorsque $\Omega$ est un demi-espace

L'opérateur A est un opérateur de convolution ; pour trouver son *symbole*, on va chercher à calculer

$$A e^{2i\pi s x_2}$$

dans le cas particulier où

$$(2.10) \quad \Omega = \{x \mid x = \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Il faut donc résoudre d'abord

$$(2.11) \quad \begin{cases} \alpha^2 \sigma - \zeta \nabla^2 \sigma = 0, \\ \sigma = e^{2i\pi s x_2} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

d'où (par *séparation des variables*) :

$$(2.12) \quad \sigma = e^{-\omega x_1} e^{2i\pi s x_2}$$

où

$$(2.13) \quad \omega^2 = \frac{\alpha^2}{\zeta} + 4\pi^2 s^2.$$

La résolution de (2.6) avec  $\sigma$  défini par (2.12) conduit à

$$(2.14)_1 \quad \underline{u} = \{u_1, u_2\}$$

avec

$$(2.14)_2 \quad \underline{u}_1 = \frac{\omega \zeta}{\alpha} (e^{-\omega x_1} - e^{-\chi x_1}) e^{2i\pi s x_2},$$

$$(2.14)_3 \quad \underline{u}_2 = -2i\pi s \frac{\zeta}{\alpha} (e^{-\omega x_1} - e^{-\chi x_1}) e^{2i\pi s x_2},$$

avec

$$(2.15) \quad \chi^2 = \frac{\alpha}{a\mu} + 4\pi^2 s^2.$$

On résout ensuite (2.7) avec  $\sigma$  et  $\underline{u}$  définis par (2.12), (2.14), d'où

$$(2.16) \quad \psi = -\frac{a\mu\zeta}{\alpha^2\beta} (\omega\chi - 4\pi^2 s^2) (e^{-\chi x_1} - e^{-\omega x_1}) e^{2i\pi s x_2}.$$

On a alors

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} A e^{2i\pi s x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \\ \frac{\frac{\alpha^2}{a\zeta\mu} + 4\pi^2 s^2 (\frac{1}{a\mu} + \frac{\alpha}{\zeta})}{(\omega+\chi)(\omega\chi + 4\pi^2 s^2)} e^{2i\pi s x_2}. \end{array} \right.$$

On a donc pour le symbole de A :

$$(2.18) \quad \mathcal{A}(s) = \frac{\frac{\alpha^2}{a\zeta\mu} + 4\pi^2 s^2 (\frac{1}{a\mu} + \frac{\alpha}{\zeta})}{(\omega+\chi)(\omega\chi + 4\pi^2 s^2)}.$$

On va chercher  $S = B^{-1}$  tel que le symbole  $\mathcal{B}(s)$  de B vérifie

$$(2.19) \quad d \frac{(\omega+c)^2}{\omega} = \mathcal{B}(s).$$

On ajuste alors d et c de telle façon que

$$(2.20) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{A}(s) \mathcal{B}(s) = \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(s) \mathcal{B}(s),$$

d'où

$$(2.21) \quad d = \frac{4}{\frac{\alpha}{\zeta} + \frac{1}{a\mu}}$$

et

$$(2.22) \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\zeta}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{\alpha a \mu} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{\alpha a \mu}{\zeta}} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\}.$$

L'opérateur  $S = B^{-1}$  sera un préconditionneur d'autant meilleur que

$$(2.23) \quad \mathcal{A}(s) \mathcal{B}(s) \text{ est proche de } 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Les Figures 2.1 et 2.2 montrent pour des valeurs typiques des paramètres les variations du produit  $\mathcal{A}(s) \mathcal{B}(s)$  en fonction de  $|s|$ . Au vu de ces courbes on peut espérer une bonne vitesse de convergence puisque l'algorithme du gradient conjugué préconditionné par  $S = B^{-1}$  devrait avoir un coefficient de contraction de l'ordre de

$$(2.24) \quad \text{Coef} = \frac{\sqrt{v_{AB}} - 1}{\sqrt{v_{AB}} + 1}$$

où  $v_{AB}$  est la valeur maximale dans les courbes ci-dessus. Par exemple, si  $v_{AB} = 2$  (resp. 1.5) le coefficient ci-dessus vaut 1/6 (resp. 0.101 ...), ce qui est remarquable.

La réalisation effective de B est décrite au paragraphe 4.2 et est donnée par les formules (4.54)-(4.58).



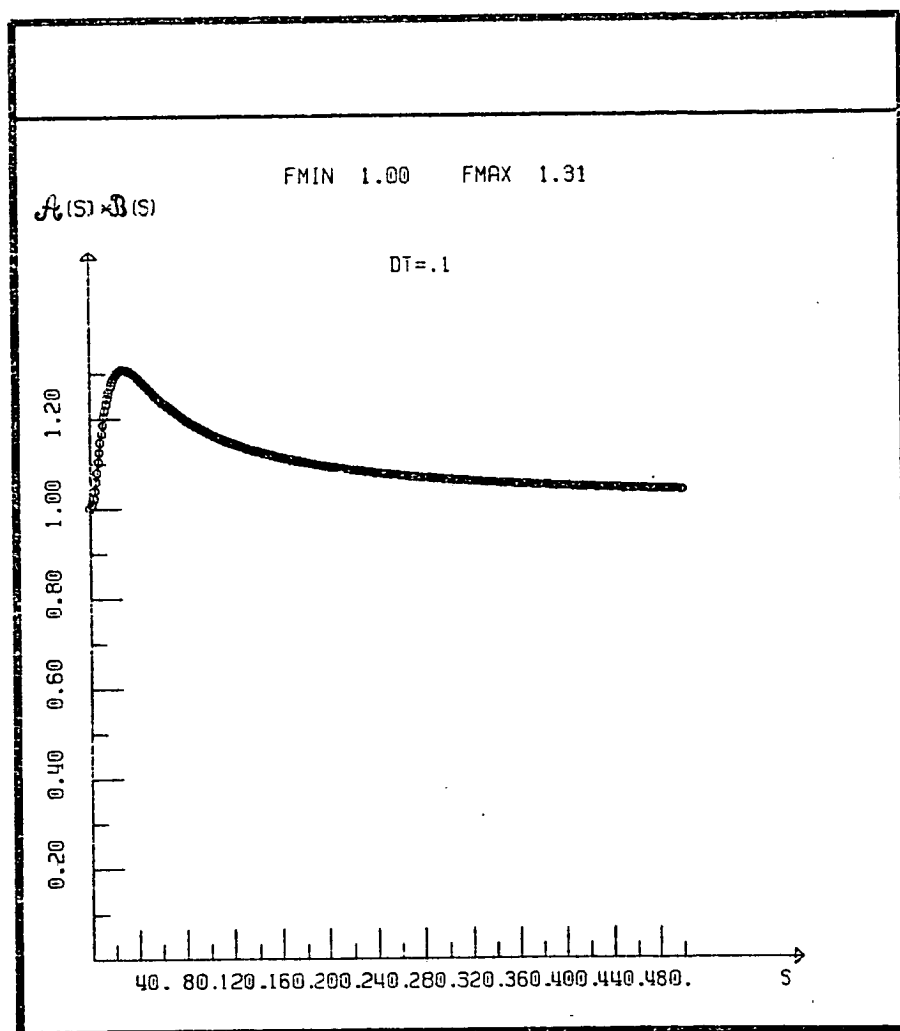


Figure 2.1.

( $M_{\infty} = .9$ ,  $Re = 500$ )

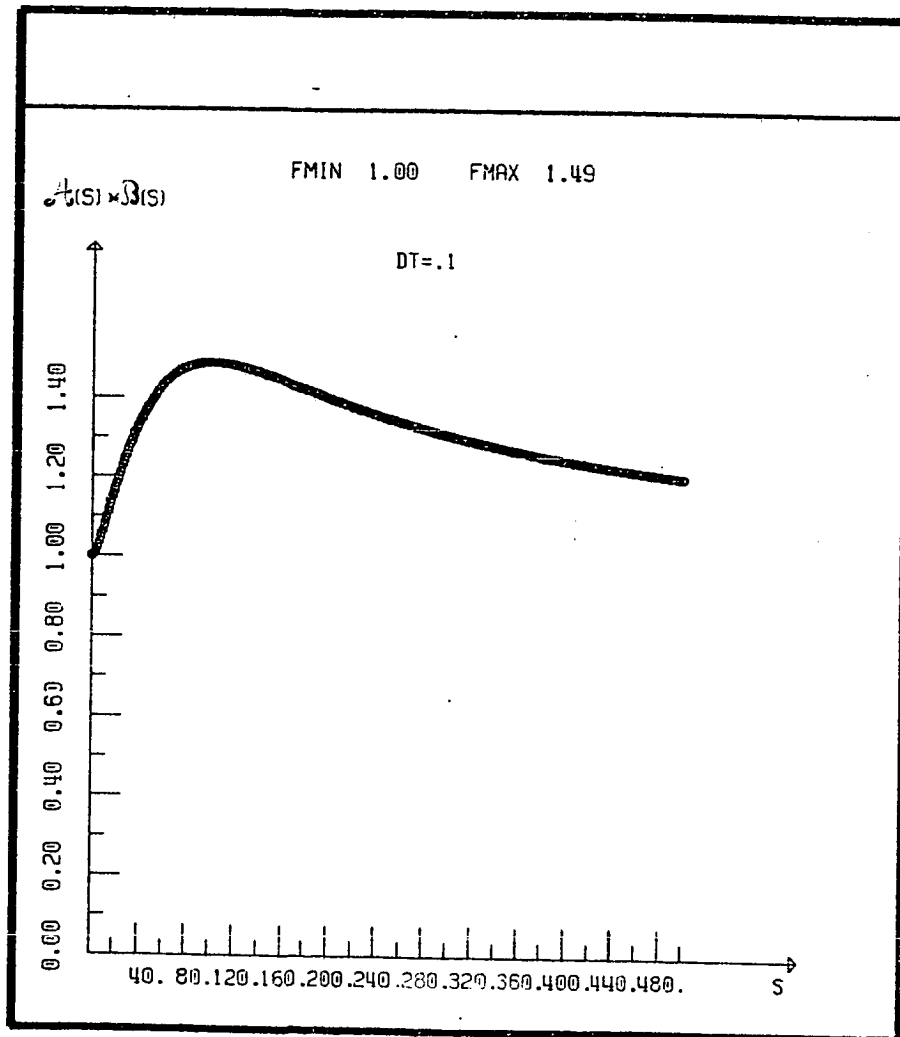


Figure 2.2.  
( $M_\infty = .9$ ,  $Re = 10000$ )

## Références

- [1] P.N. Brown, Y. Saad, Hybrid Krylov Methods for Nonlinear Systems of Equations, *Lawrence Livermore National Laboratory Research Report UCLR-97645*, Nov. 1987.
- [2] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [3] M.O. Bristeau, R. Glowinski, J. Périaux, Numerical Methods for the Navier-Stokes Equations, Applications to the Simulation of Compressible and Incompressible Viscous Flows, *Computer Physics Reports*, 6, (1987), 73-187.
- [4] R. Glowinski, O. Pironneau, On numerical methods for the Stokes problem, Chapter 13 of *Energy Methods in Finite Element Analysis*, R. Glowinski, E.Y. Rodin, O.C. Zienkiewicz eds., J. Wiley, Chichester, 1979, pp. 243-264.
- [5] C. Bègue, R. Glowinski, J. Périaux, Détermination d'un opérateur de pré-conditionnement pour la résolution itérative du problème de Stokes dans la formulation d'Helmholtz, *C.R. Acad. Sciences*, Paris, t.306, Série I, pp.247-252, 1988.
- [6] R. Glowinski, On a new preconditioner for the Stokes problem, Research Report UH/MD-16, May 1987.
- [7] N. Goutal, Résolution des équations de Saint-Venant, Thèse, Université de Paris 6, Feb. 1987.
- [8] C. Bègue, M.O. Bristeau, R. Glowinski, B. Mantel, J. Périaux, G. Rogé, Sur l'Analyse de Fourier d'un opérateur de préconditionnement pour le problème de Stokes généralisé des écoulements visqueux compressibles (à paraître).
- [9] M.O. Bristeau, O. Pironneau, R. Glowinski, J. Périaux, P. Perrier and G. Poirier, On the numerical solution of nonlinear problems in Fluid Dynamics by least squares and finite element methods (II). Application to transonic flows simulations, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 51, (1985), pp. 363-394, North-Holland.

- [10] L.B. Wigton, N.J. Yu and D.P. Young, GMRES Acceleration of Computational Fluid Dynamics Codes, AIAA 7th Computational Fluid Dynamics Conference, Cincinnati, Ohio, July 1985, Paper 85-1494, pp. 67-74.
- [11] C. Bègue, M.O. Bristeau, R. Glowinski, B. Mantel, J. Périaux, Acceleration of the convergence for viscous flow calculations, in Numeta 87, Volume 2, G.N. Pande, J. Middleton eds., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987, pp. T4/1 - T4/20.
- [12] M. Mallet, J. Périaux, B. Stoufflet, On fast Euler and Navier-Stokes solvers. Proceed. of the 7th GAMM Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Louvain 1987.
- [13] J.E. Dennis and R.B. Schnabel, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [14] G. Rogé, Thèse Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1988-89 (à paraître).
- [15] M.O. Bristeau, R. Glowinski, B. Mantel, J. Périaux, G. Rogé, Self-adaptive finite element methods for 3D compressible Navier-Stokes flow simulation in Aerospace engineering, 11th Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics, Williamsburg, U.S.A., June 1988 (à paraître).

